MATEMATIKA

Brazilská čísla a prvočísla

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

V článku se budeme věnovat námětu, který pochází z 9. *Iberoamerické matematické olympiády.* Ta se konala v září 1994 v brazilské *Fortaleze* a jedna ze soutěžních úloh tehdy měla následující zadání.

Přirozené číslo n nazveme „brazilským“, pokud ve vhodné poziční soustavě o základu z, kde $1 < z < n - 1$, má číslo n zápis složený ze stejných číslic. Dokažte, že číslo 1994 je brazilské, zatímco číslo 1993 brazilské není.

Text úlohy doplňme prozatím pouze jedním vysvětlením: Brazilské je například číslo 2000, protože má v soustavě o základu 7 zápis složený ze čtyř pětek. Platí totiž

$$5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 1715 + 245 + 35 + 5 = 2 \cdot 10^3.$$

Pozičně to zapisujeme rovností $(5555)_7 = 2000$, kde napravo jsme v zápise $(2000)_{10}$ jako obvykle vynechali základ $z = 10$.

Před vlastním matematickým posouzením brazilských čísel uveďme několik poznámek k jejich 30leté historii. Úlohu do soutěže v roce 2024 nenavrhla Brazílie, nýbrž Mexiko. Namísto přívlastku „brazilské“ bylo ve španělském originálu zadání uvedeno slovo „sensato“ (česky „rozumné, praktické“). Termín „brazilské“ poprvé užili autoři *Pierre Bronsztein* a *Johan Yebbou* ve své sbírce olympiádních úloh *Hypermath (120 exercises dehaut vol)*, Éditions Vuibert (2001). Její francouzské čtenáře téma brazilských úloh zaujalo natolik, že k němu vytvořili samostatnou sekci na

[0]Tento článek vznikl na základě autorova vystoupení při slavnostním zahájení ústředního kola $(111)_8$. ročníku Matematické olympiády v Českých Budějovicích na jaře 2024. Autora k němu inspiroval článek *Les nombres brésiliens*, který napsal *Bernard Schott* pro číslo 76 (duben–červen 2010) francouzského časopisu *Quadrature*.

internetovém fóru www.Les-Mathematiques.net. K výzkumu brazilských čísel se brzy připojili matematikové dalších zemí. Význam dosahovaných výsledků se časem projevil i tím, že se brazilská čísla objevila na prestižních stránkách The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, a to v jejich sekcích A125134, A053696, A085104 a A220627.

Náš výklad vlastností brazilských čísel zahájíme tím, že jejich definici z úvodní úlohy pro přehlednost a jasnost zopakujeme ve formálnější podobě.

Definice

Přirozené číslo n nazveme *brazilským*, pokud existují celá čísla c a z, které splňují nerovnosti $0 < c < z < n-1$, přičemž pro vhodné celé číslo k platí rovnost

$$n = cz^{k-1} + cz^{k-2} + \ldots + cz + c, \quad \text{zkráceně } n = (\underbrace{cc\ldots c}_{k})_z.$$

Brazilskému číslu, které je prvočíslo, budeme říkat *brazilské prvočíslo*.

Zdůrazněme, že zatímco význam nerovností $0 < c < z$ je v podané definici zřejmý (c je totiž nenulová číslice v poziční soustavě o základu z), doplňující nerovnost $z < n-1$ vylučuje případ rovnosti $z = n-1$. Kdybychom ji v definici připustili, kvůli triviální rovnosti $n = (11)_{n-1}$ bychom došli k závěru, že brazilské je každé celé číslo n větší než 2.

Snadným experimentováním (totiž výpočtem „malých" čísel $(cc\ldots c)_z$ postupně pro $z = 2, 3, 4, \ldots$) lze ověřit, že všechna brazilská čísla menší než 150 tvoří „neúplnou" tabulku 1 o rozměrech 15×10.[1)]

Jaké možné závěry sestavená tabulka naznačuje? Všimněme si, že ta čísla od 7 do 149, která v tabulce chybějí, jsou

$$9, 11, 17, 19, 23, 25, 29, 37, 41, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 79$$
$$83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 131, 137, 139, 149.$$

Vidíme, že tato (ne brazilská) čísla jsou prvočísla až na čísla 9, 25 a 49, která jsou druhými mocninami prvočísel 3, 5, resp. 7. Šest prvočísel 7, 13, 31, 43, 73, 127 spolu s druhou mocninou $11^2 = 121$ však v tab. 1 nechybí (jde tedy o sedm brazilských čísel). Tato pozorování jsou ve shodě s následujícími dvěma tvrzeními, která uvedeme i s jejich důkazy.

1) Například číslo 80 má dokonce pět vyhovujících zápisů: $(2222)_3$, $(88)_9$, $(55)_{15}$, $(44)_{19}$, $(22)_{39}$.

							7	8	
10		12	13	14	15	16		18	
20	21	22		24		26	27	28	
30	31	32	33	34	35	36		38	39
40		42	43	44	45	46		48	
50	51	52		54	55	56	57	58	
60		62	63	64	65	66		68	69
70		72	73	74	75	76	77	78	
80	81	82		84	85	86	87	88	
90	91	92	93	94	95	96		98	99
100		102		104	105	106		108	
110	111	112		114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
130		132	133	134	135	136		138	
140	141	142	143	144	145	146	147	148	

Tabulka 1: Brazilská čísla menší než 150

Věta 1

Všechna sudá čísla větší než 6 jsou brazilská.

Důkaz. Každé sudé $n > 6$ je tvaru $n = 2k$, kde $k \geq 4$ je sudé. Proto vyjádření

$$n = 2k = 2(k-1) + 2 = (22)_{k-1}$$

s ohledem na nerovnosti $2 < k - 1 < 2k - 1 = n - 1$ vede k závěru, že číslo n je skutečně brazilské.

Věta 2

Všechna lichá čísla větší než 5 jsou brazilská kromě některých prvočísel a některých druhých mocnin prvočísel.

Důkaz. Předpokládejme, že liché číslo $n > 5$ není ani prvočíslo, ani druhá mocnina prvočísla. Označme p nejmenší prvočinitel čísla n, takže platí

$n = pk$, kde obě čísla p, k jsou lichá a přitom $p < k$, tudíž $p < k - 1$. Nyní vyjádření

$$n = pk = p(k-1) + p = (pp)_{k-1}$$

s ohledem na nerovnosti $p < k - 1 < pk - 1 = n - 1$ znamená, že číslo n je skutečně brazilské.

Dokázané věty 1 a 2 znamenají, že k popisu všech brazilských čísel zůstává nevyřešenou „jen“ tato otázka: Která čísla p a která čísla p^2 jsou brazilská, probíhá-li p množinu všech prvočísel? Překvapivá odpověď pro čísla p^2 už je známa, její důkaz pro značnou náročnost postupu však neuvedeme.

Věta 3

Jediné prvočíslo p takové, že p^2 je brazilské číslo, je $p = 11$.

K větě 3 jen dodejme, že je součástí hlubokého výsledku norského matematika *Trygve Nagella* z roku 1921 o řešení rovnice

$$x^2 = 1 + y + y^2 + \ldots + y^{k-1}$$

v oboru celých čísel $x > 1$, $y > 1$ a $k > 2$. Nagell dokázal, že jediná dvě řešení (x, y, k) jsou trojice $(11, 3, 5)$ a $(20, 7, 4)$, které odpovídají rovnostem $11^2 = 121 = (11111)_3$ a $20^2 = 400 = (1111)_7$.

Ve zbytku našeho příspěvku se už budeme zabývat pouze brazilskými prvočísly. Nejprve představíme ta z nich, která nepřevyšují 1000, i s jejich potřebnými vyjádřeními.[2)]

$$\begin{array}{rl}
7 = (111)_2 & 211 = (111)_{14} \\
13 = (111)_3 & 241 = (111)_{15} \\
31 = (111)_5 & 307 = (111)_{17} \\
43 = (111)_6 & 421 = (111)_{20} \\
73 = (111)_8 & 463 = (111)_{21} \\
127 = (1111111)_2 & 601 = (111)_{24} \\
157 = (111)_{12} & 757 = (111)_{27}
\end{array}$$

[2)] Ostatní brazilská prvočísla menší než 20 000 jsou 1093, 1123, 1483, 1723, 2551, 2801, 2971, 3307, 3541, 3907, 4423, 4831, 5113, 5701, 6007, 6163, 6481, 8011, 8191, 9901, 10 303, 11 131, 12 211, 12 433, 13 807, 14 281, 17 293, 19 183, a 19 531. To naznačuje, že brazilská prvočísla nacházíme mezi všemi prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, … poměrně vzácně. Přesněji to dále vystihneme větou 5.

Není náhoda, že ve vyjádřeních $p = (cc \dots c)_z$ všech těchto prvočísel p je číslice c rovna 1: Číslo $(cc \dots c)_z$ je totiž c-násobkem čísla $(11 \dots 1)_z$, takže v případě $c > 1$ nemůže jít o prvočíslo. Brazilská jsou tedy právě prvočísla vyjádřená pro vhodné $z > 1$ zápisem $(11 \dots 1)_z$ s více než dvěma jedničkami.

Největšímu zájmu matematiků se už dávno těší skupina brazilských prvočísel $(11 \dots 1)_z$ s nejmenším základem $z = 2$. Jde zřejmě o prvočísla tvaru $2^k - 1$, která po více než 300 let nesou název `Mersennova`. Jejich souvislost s `dokonalými čísly` objevil už Eukleides. Druhou příčinou zájmu je skutečnost, že právě pro čísla tvaru $2^k - 1$ existují speciální rychlé metody testování jejich prvočíselnosti. Proto také všechna rekordně velká, v posledních desetiletích objevovaná prvočísla jsou Mersennova.[3)]

O množině všech brazilských prvočíslech toho dosud příliš nevíme. Svědčí o tom následující trojice zajímavých otázek, na které matematikové dosud marně hledají odpovědi.

- Je brazilských prvočísel nekonečně mnoho, jako je všech prvočísel?
- Existuje pro každý základ z větší než 1, který není druhou ani vyšší mocninou celého čísla, prvočíslo se zápisem $(11 \dots 1)_z$ o více než dvou jedničkách?
- Jsou 31 a 8191 jediná dvě prvočísla, která mají ve dvou různých soustavách zápisy tvořené samými (více než dvěma) jedničkami? Platí totiž $31 = (111)_5 = (11111)_2$ a $8191 = (1111111111111)_2 = (111)_{90}$.

Něco málo o brazilských prvočíslech (kromě konečného počtu jejich příkladů) je však už známo. Uvedeme a dokážeme pro ně dvě tvrzení.

Věta 4

Je-li při některém základu $z > 1$ číslo $(11 \dots 1)_z$ zapsané j jedničkami prvočíslo, pak i číslo j je prvočíslo.

Důkaz. Předpokládejme, že číslo j není prvočíslo, má tedy některého dělitele d, kde $1 < d < j$. Ze známého algoritmu písemného dělení pro čísla zapsaná v poziční soustavě o základu z pak ovšem plyne, že číslo větší než 1 zapsané d jedničkami je dělitelem většího čísla zapsaného j jedničkami, které tudíž není prvočíslo.

[3)] Z dosud známých 51 Mersennových prvočísel je od roku 2018 největší číslo $2^{82\,589\,933} - 1$, které má v desítkové soustavě 24 862 048 číslic. Oproti tomu známe pouze 10 brazilských prvočísel, která jsou zapsána samými jedničkami v desítkové soustavě; nejmenší z nich má 19 jedniček (prvočíslo 11 totiž není brazilské), největší má 8 177 207 jedniček.

Před formulací posledního výsledku upozorníme na jedno známé hlubší tvrzení z teorie čísel o tom, že nekonečná řada sestavená z převrácených hodnot všech různých prvočísel diverguje:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots=\infty.$$

Přestože dosud nevíme, zda všech brazilských prvočísel je konečně či nekonečně mnoho, součet obdobný předchozímu dokážeme odhadnout shora.

Věta 5

Pro součet převrácených hodnot všech brazilských prvočísel platí nerovnost

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{31}+\frac{1}{43}+\frac{1}{73}+\frac{1}{127}+\ldots<1.$$

Důkaz. Jistě stačí ukázat, že menší než 1 je součet převrácených hodnot všech čísel $(\underbrace{11\ldots1}_{k})_z$ s celočíselnými parametry $z \geq 2$ a $k \geq 3$. K tomu odhadneme nejprve součet těchto převrácených hodnot při každém pevném $z \geq 2$, jehož hodnotu označíme S_z. Užitím vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $1/z$ dostaneme

$$\begin{aligned}S_z &= \frac{1}{(111)_z}+\frac{1}{(1111)_z}+\frac{1}{(11111)_z}+\ldots=\\ &= \frac{1}{z^2+z+1}+\frac{1}{z^3+z^2+z+1}+\frac{1}{z^4+z^3+z^2+z+1}+\ldots<\\ &< \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností pro $z=2,3,\ldots,N$ obdržíme

$$\begin{aligned}&S_2+S_3+\ldots+S_N<\\ &\qquad<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)=1-\frac{1}{N}<1.\end{aligned}$$

Z platnosti této nerovnosti pro každé $N \geq 2$ plyne neostrá nerovnost

$$\sum_{z=2}^{\infty} S_z \leq 1.$$

Získaná nerovnost je ovšem ve skutečnosti ostrá, neboť všechny sčítané nerovnosti $S_z < \frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$ byly ostré.