O vlastnostech trojúhelníku spjatých s jeho ortocentrem

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Článek [2] se zabýval převážně důkazy věty o ortocentru trojúhelníku. V návaznosti na něj uvedeme další poznatky, které mohou být užitečné při řešení úloh z matematických soutěží.

Úvahy omezíme na ostroúhlé a tupoúhlé trojúhelníky. Ověření platnosti vyslovených vět nebo jejich úpravu pro situace, kdy je trojúhelník pravoúhlý, ponecháváme čtenáři.

Ortocentrum trojúhelníku ABC značíme V, těžiště T a kružnici mu opsanou $k(O;r)$. Dále pak P, Q, R budou paty výšek z vrcholů A, B, C a S_a, S_b, S_c středy stran BC, CA, AB. Body osově sdružené s ortocentrem podle přímek BC, CA a AB nechť jsou D, E a F. Vše v uvedeném pořadí.

Nejprve si připomeneme větu 1 dokázanou ve zmíněném článku a seznámíme se s příbuznou větou 2.

Věta 1

Obrazy ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.

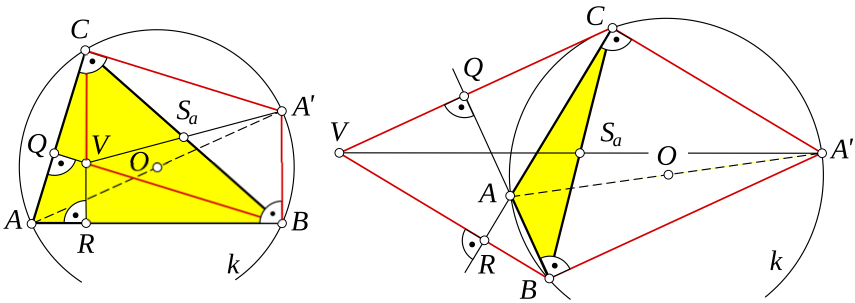
Věta 2

Obrazy ortocentra v souměrnostech podle středů stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané a jsou podle jejího středu souměrně sdružené s protilehlými vrcholy trojúhelníku.

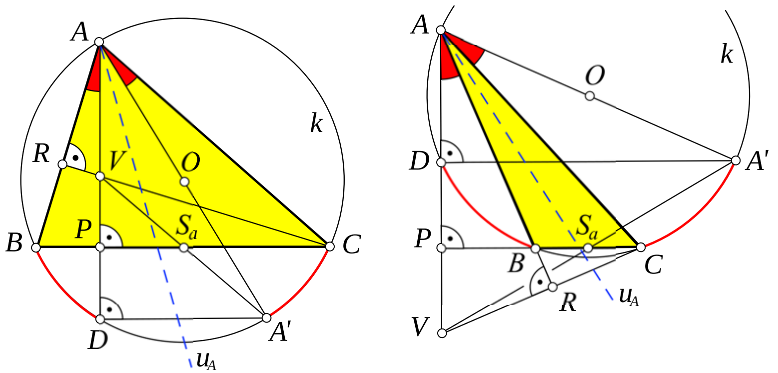
Důkaz. Označme A' obraz vrcholu A v souměrnosti podle středu O kružnice trojúhelníku ABC opsané, obr. 1. Úhly ABA' a ACA' nad průměrem AA' jsou pravé. Platí $BA' \parallel CV$, neboť obě úsečky jsou kolmé na přímku AB. Analogicky je též $CA' \parallel BV$, a tak je $CVBA'$ rovnoběžník. Ze symetrie podle průsečíku S_a jeho úhlopříček plyne věta 2.

Zabývejme se dále důsledky obou vět. Platí $BC \perp AD \perp DA'$ (Thaletova věta), neboli $A'D \parallel BC$, obr. 2. Oblouky BD a $A'C$, symetrické podle společné osy rovnoběžných tětiv BC a $A'D$, jsou shodné. Stejně tak i jejich doplňky, oblouky DC a BA'. Pro příslušné obvodové úhly platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle A'AC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAA'|. \tag{1}$$



Obr. 1 K důkazu věty 2



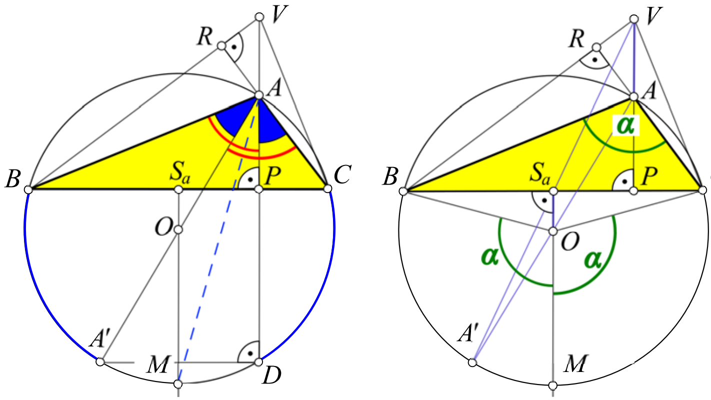
Obr. 2 Přímky AV a AO jsou souměrně sdružené podle osy úhlu BAC

Na obr. 3 vlevo je ještě znázorněna situace, kdy je úhel BAC tupý. Zjištěné vztahy vedou k následující větě 3, neboť $O \in AA'$ a $V \in AD$.

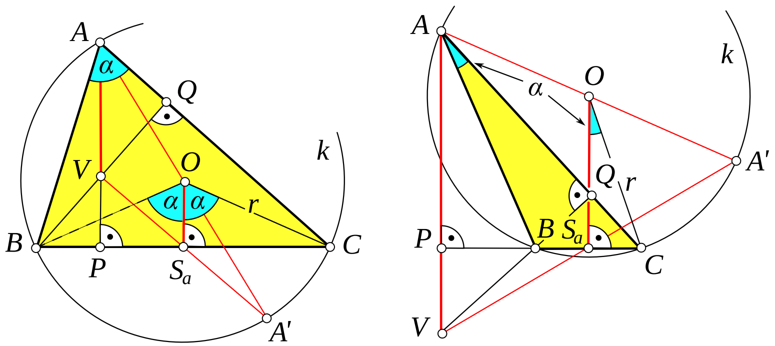
Věta 3

Je-li V ortocentrum trojúhelníku ABC a O střed jemu opsané kružnice, pak jsou přímky AV a AO souměrně sdružené podle osy úhlu BAC.

Obraťme nyní pozornost na úsečku OS_a, obr. 4 a obr. 3 vpravo. Ta je střední příčkou trojúhelníku AVA' a zároveň výškou rovnoramenného trojúhelníku BCO. Odtud a z vlastností střední příčky OS_a trojúhelníku VAA' plyne věta 4.



Obr. 3 Doplnění obrázků 2 a 4 pro tupý úhel α



Obr. 4 $OS_a \parallel AV$ a $|AV| = 2|OS_a| = 2r\cos\alpha$

Věta 4

V trojúhelníku ABC je úsečka OS_a rovnoběžná s úsečkou AV a platí

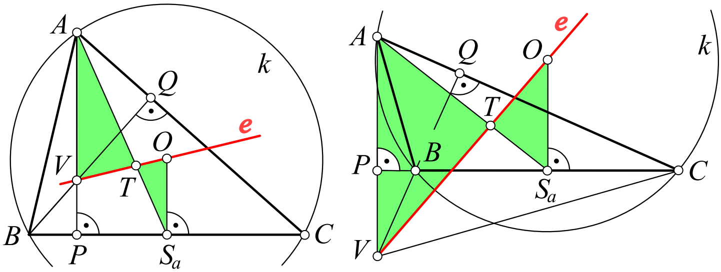
$$|AV| = 2|OS_a| = 2r|\cos\alpha|. \tag{2}$$

Lichoběžník AVS_aO má několik zajímavých vlastností. Průsečík T jeho úhlopříček je těžištěm trojúhelníku ABC, neboť leží na těžnici AS_a a z podobnosti trojúhelníků AVT, S_aOT plyne $\frac{|AT|}{|TS_a|} = \frac{|AV|}{|OS_a|} = 2$, obr. 5.

Přímka, na níž leží body A, V a T se nazývá *Eulerova přímka* a platí věta 5.

Věta 5

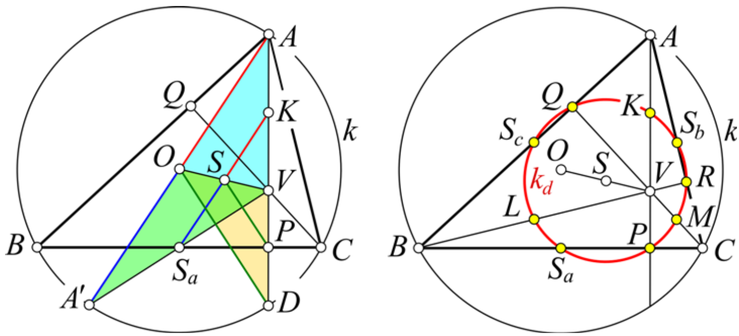
Těžiště T nerovnostranného trojúhelníku ABC leží uvnitř úsečky OV a platí $|VT| = 2|OT|$.



Obr. 5 Eulerova přímka e

Je zajímavé, že Euler dospěl k poznatku z věty 5 mimochodem a nevěnoval mu přílišnou pozornost. Jeho práce [1] z roku 1763 řeší početně problém, jak (při námi zavedeném označení) nalézt trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho body O, T, V a střed I vepsané kružnice. Netriviálními výpočty určoval vztahy mezi vzdálenostmi daných a hledaných bodů trojúhelníku.

Zjistil, že $|VO| = \frac{3}{2}|VT|$ a $|TO| = \frac{1}{2}|VT|$. Vztahy doplnil poznámkou, že body V a T určují polohu středu O opsané kružnice, a dále se jimi nezabýval.



Obr. 6 Kružnice devíti bodů

Na úsečce OV leží ještě jeden zajímavý bod, její střed S. Je-li K střed úsečky AV, pak

$$\frac{r}{2} = |SK| = |SS_a| = |SP|. \tag{3}$$

Plyne to z vlastností středních příček SK, SS_a a SP trojúhelníků OAV, $OA'V$ a ODV (obr. 6 vlevo).

Jiná možnost odvození rovností (3) vychází z postřehu, že úsečka KS_a je střední příčkou trojúhelníku $AA'V$ a zároveň úhlopříčkou rovnoběžníku $VKOS_a$. Má tedy délku r a prochází bodem S, jenž je navíc středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku KS_aP.

Zobecněním vztahů (3) je věta 6 o *kružnici devíti bodů* onačované též jako *Feuerbachova kružnice.*

Věta 6

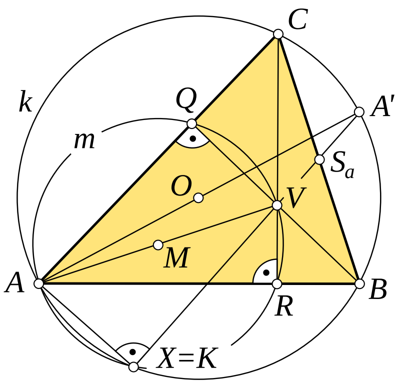
V trojúhelníku ABC leží na kružnici, jež má střed S uprostřed úsečky OV a poloměr $\frac{r}{2}$, středy stran trojúhelníku, paty jeho výšek a středy úseček AV, BV, CV.

Cílem článku bylo představit známé vlastnosti trojúhelníku v méně uváděných souvislostech. Vycházeli jsme z minimálních poznatků, aby se text dal použít i pro práci s mladšími studenty. Proto jsme např. záměrně nepracovali se stejnolehlostí, pomocí níž se věty 5 a 6 často dokazují.

Závěrem ukážeme využití uvedených poznatků na dvou vyřešených příkladech a přidáme několik úloh k samostatnému procvičení.

Příklad 1

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami BQ a CR. Kružnice k a m opsané trojúhelníkům ABC a AQR se protínají v bodech A, K. Dokažte, že přímka KV prochází středem S_a strany BC.



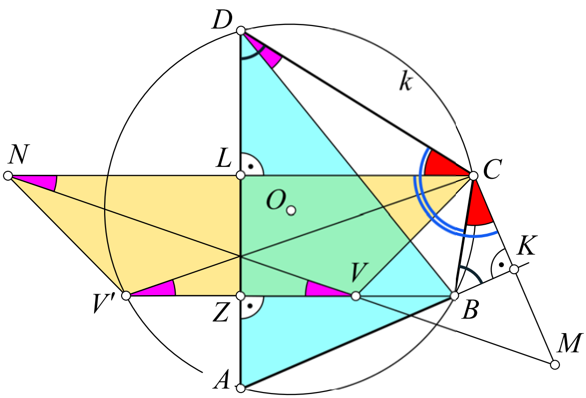
Obr. 7 K příkladu 1

Řešení. Z věty 2 víme, že obraz A' vrcholu A v souměrnosti podle středu O kružnice k leží na přímce $p = VS_a$, obr. 7. Průsečík této přímky (různý od bodu A) s kružnicí k označíme X a dokážeme, že $X = K$.

Platí $|\sphericalangle AXV| = |\sphericalangle AXA'| = 90°$. Čtyřúhelník $ARVQ$ je tětivový, neboť $|\sphericalangle ARV| + |\sphericalangle AQV| = 180°$. Opsaná kružnice m má průměr AV a je do ní vepsán i trojúhelník AVX. Odtud $X \in k \cap m$, $K = X \in p$. Přímka KV tedy prochází středem S_a strany BC.

Příklad 2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, který je vepsán do kružnice k a má ostré úhly při vrcholech A a D, jsou body M a N souměrně sdružené s vrcholem C podle přímek AB a AD. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku ABD leží na přímce MN.



Obr. 8 K příkladu 2

Řešení. Nechť BZ je výška trojúhelníku ABD, V její průsečík s přímkou MN a V' bod souměrně sdružený s bodem V podle přímky AD, obr. 8. Středy úseček CM a CN nechť jsou K a L (v daném pořadí).

S odvoláním na větu 1 stačí ověřit, že $V' \in k$. Dokážeme tedy, že je úsečka BC z bodů V' a D (ležících v téže polorovině s hraniční přímkou BC) vidět pod stejným úhlem.

Vnější úhel CBK tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ je shodný s jeho protilehlým úhlem LDC, a tak jsou pravoúhlé trojúhelníky BCK a DCL podobné. Odtud

$$|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle BCK| \quad \text{a} \quad \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CL|}{|CK|}.$$

Obě rovnosti ekvivalentně upravíme. Každý z obou úhlů nahradíme jeho geometrickým součtem s úhlem NCB a poslední zlomek rozšíříme dvěma.

$$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle NCM| \quad \text{a} \quad \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{2|CL|}{2|CK|} = \frac{|CN|}{|CM|}. \tag{4}$$

Ze vztahů (4) plyne podobnost trojúhelníků DBC a NMC podle věty *sus*. Užijeme ji spolu s lichoběžníkem $CNV'V$ souměrným podle přímky AD k dokončení důkazu; $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle NVV'| = |\sphericalangle BV'C|$, a tak $V' \in k$.

Úlohy k samostatnému procvičení

1. V rovině jsou dány body C, U, V takové, že $|CV| = 3$ cm, $|VU| = 3{,}5$ cm a $|CU| = 4{,}5$ cm. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. (51MO C-II-4)
2. Uvnitř strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC leží bod X takový, že $|AX| = |AC|$. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě U. Dokažte, že $AO \perp UX$.
3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jsou V_a, V_b, V_c a V_d po řadě ortocentra trojúhelníků BCD, ACD, ABD a ABC. Dokažte, že $V_aV_bV_cV_d$ je čtyřúhelník shodný se čtyřúhelníkem $ABCD$ a má s ním rovnoběžné strany.
   (Pomocí vět 3 a 4 dokažte, že $|BM| = |BN|$.)
4. Ostroúhlý trojúhelník ABC má $\beta = 60°$. Přímka TO protíná jeho strany v bodech M a N. Dokažte, že je trojúhelník BMN rovnostranný.
5. Určete velikosti úhlů ostroúhlého trojúhelníku ABC, jehož osa AU úhlu BAC je shodná se stranou AC a je kolmá na přímku OV.
   (Využijte věty 3 a 4, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$.)

Literatura

[1] *Euler, L.*: E325, Solutio facilis problematum quorundam geometrycorum difficillimorum. eulerarchive.maa.org/backup/E325.html

[2] *Leischner, P.*: Ortocentrum trojúhelníku. Matematika–fyzika–informatika, roč. 33 (2024), č. 2, s. 100–107.

[3] *Sergjejev, P., Saveljeva, A.*: Vokrug ortotreyugolnika. Kvant, roč. 2019, č. 7, s. 26–31.

[4] *Švrček, J.*: Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníku. Karolinum, Praha, 1998.