O testových úlohách s nejednoznačným řešením

MIROSLAV KOLAŘÍK – ALŽBĚTA KOLAŘÍKOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc – Pedagogická fakulta UP, Olomouc

Budeme se zabývat úlohami s nejednoznačným řešením a jejich vhodným a nevhodným využitím. Představíme některé převzaté úlohy s příklady možných variant řešení. Podrobněji se budeme věnovat problematice doplňování posloupnosti čísel. Seznámíme zde čtenáře s pojmem kolmogorovská složitost, která může sloužit jako kritérium pro hodnocení obtížnosti úloh s doplňováním posloupnosti čísel, přičemž náročnost doplnění souvisí zejména s počtem a pravidelností jejích členů. Nakonec detailně rozvedeme, jak doplnit zdánlivě jednoznačnou posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, 5.

Cílem článku je zaměřit se na problematiku nejednoznačně zadaných úloh a také ukázat, že u každé konečné posloupnosti čísel lze libovolně doplnit její další člen.

Vybrané příklady úloh s nejednoznačným řešením

Z [1] bylo převzato zadání následujících sedm konkrétních úloh. Po zadání každé úlohy vždy následuje stručné a logicky správné zdůvodnění několika vybraných možných řešení. Podobných úloh lze najít nebo vymyslet celou řadu, pro potřeby tohoto článku nám však tento výběr dostatečně postačuje.

Zdůrazněme, že následujících sedm převzatých úloh se autorům článku nelíbí, především proto, že je v [1] deklarována jejich jednoznačnost. Právě jednoznačnost autoři rozporují, neboť uvádějí více možných řešení. Autorům také vadí nejasné či nepřesné zadání a celkové nedidaktické zpracování. Přesto jsou tyto úlohy záměrně ponechány v původní podobě[1)], zejména proto, že se jim podobné úkoly poměrně často vyskytují. Je téměř jisté, že učitelé na tento typ úloh opakovaně narazí a měli by jej proto umět identifikovat a správně zařadit.

[1)] Některé úlohy byly mírně modifikovány.

1. Doplňte chybějící číslo na místo otazníku.

3   8   ?   21

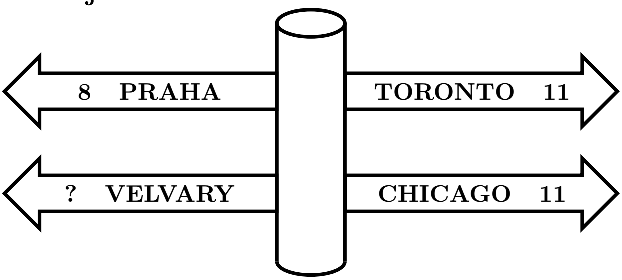
První řešení: -10
Součet prvních dvou čísel vyjde stejně jako součet druhých dvou čísel.

Druhé řešení: 12
Součet dvou po sobě jdoucích čísel spolu s číslem 1 dá následující číslo, tedy $3 + 8 + 1 = 12$ a $8 + 12 + 1 = 21$.

Třetí řešení: 14
Rozdíl mezi druhým a prvním číslem je 5, mezi třetím a druhým číslem je rozdíl 6 a mezi čtvrtým a třetím číslem je rozdíl 7.

Čtvrté řešení: 16
Rozdíl první dvojice čísel vyjde 5, stejně jako rozdíl druhé dvojice čísel, tedy $8 - 3 = 5$ a $21 - 16 = 5$.

2. Jak daleko je do Velvar?



Řešení: 8
Česká města mají přiřazenu hodnotu 8, zahraniční města mají přiřazenu hodnotu 11.

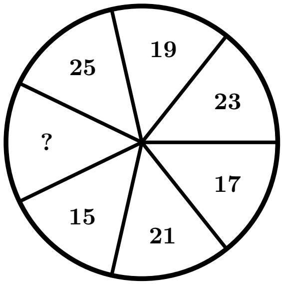
Jiné řešení: 11
Každá samohláska v názvu města má hodnotu 1, každá souhláska má hodnotu 2. Vzdálenost je pak určena součtem všech hodnot jednotlivých písmen v názvu města.

3. Kam patří písmeno I – nad linku, nebo pod linku?

Řešení: Písmeno I *patří nad linku.*
Nad linku patří všechna písmena sestávající výhradně z rovných čar. Pod linku patří ostatní písmena.

Jiné řešení: Písmeno I *patří pod linku.*
Pod linku patří všechna písmena, která lze napsat jedním tahem. Nad linku patří ostatní písmena.

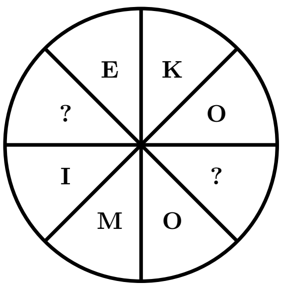
4. Které číslo patří na místo otazníku?



Řešení: 21
Čteme-li v protisměru pohybu hodinových ručiček každé druhé číslo počínaje patnáctkou, obdržíme posloupnost 15, 17, 19, 21. Zbývající čísla 21, 23, 25 tvoří také rostoucí posloupnost, kde každý následující člen je vždy o 2 větší než jemu předcházející člen.

Jiné řešení: 19
Čteme-li v protisměru pohybu hodinových ručiček každé druhé číslo počínaje otazníkem, obdržíme posloupnost 19, 21, 23, 25. Zbývající čísla 15, 17, 19 tvoří také rostoucí posloupnost, kde každý následující člen je vždy o 2 větší než jemu předcházející člen.

5. Doplňte dvě chybějící písmena.



Poznámka 1. Je nevhodné označit dvě neznámé, které mohou být odlišné, stejným symbolem (otazníkem). Pro potřeby popisu řešení označíme otazník umístěný mezi dvěmi písmeny O symbolem x a otazník umístěný mezi písmeny I a E symbolem y.

Řešení: $x = N$, $y = E$
Doplníme písmena tak, aby vzniklo slovo EKONOMIE.

Jiné řešení: $x = H$, $y = S$ *a dále například:* $x = K$, $y = C$ *nebo* $x = L$, $y = L$
Doplníme písmena tak, aby vznikla dvě existující slova: KOHO a MISE, případně: OKO a MICEK nebo KOLO a MILE.

6. Určete, které slovo nepatří mezi ostatní slova.

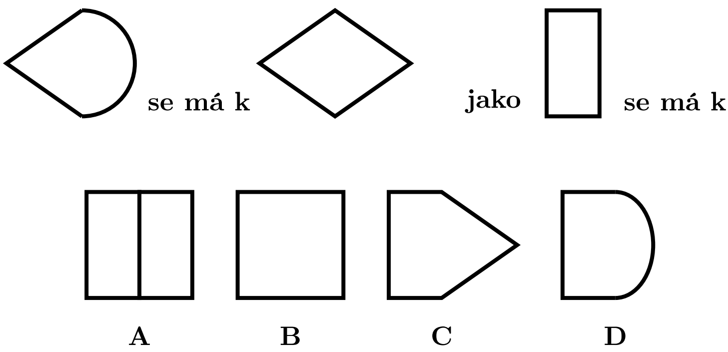
ABRAHÁM EFEKT OPICE MNICH LANO

První řešení: LANO
U všech ostatních slov je vždy druhé písmeno abecedně ihned po prvním písmenu.

Druhé řešení: EFEKT
Jen slovo EFEKT je abstraktní, všechna ostatní slova jsou konkrétní.

Třetí řešení: ABRAHÁM
Jen slovo ABRAHÁM obsahuje nějaké diakritické znaménko (konkrétně čárku v písmenu Á).

7. Který z obrázků doplníte?



Řešení: C
Levá polovina se ponechá stejně. Na pravou polovinu se zkopírují dvě úsečky ve tvaru „>“.

Jiné řešení: B, resp. A
Levá polovina se ponechá stejně. Na pravou polovinu se umístí zkopírovaná levá strana otočená o 180° (prostřední úsečka se neponechá, resp. ponechá).

Kde se s nejednoznačně zadanými úlohami můžeme setkat? Kdy je to žádoucí a kdy nežádoucí?

Nejednoznačně zadané úlohy se typicky vyskytují v šifrovacích hrách, kde hráči musí uhodnout, jaký šifrovací princip autor zvolil, a s jeho znalostí získat kýžené heslo. V České republice se pořádá značné množství šifrovacích her, kterých se účastní tisíce hráčů. U těchto her hráči s rizikem nejednoznačnosti zadání musejí počítat. I přesto se často po hrách ve zpětných vazbách vyskytuje kritika u šifer, které by šlo logicky řešit i jinak, než autoři zamýšleli, a jsou chváleny šifry, kde je správný postup potvrzován a slepých cest není mnoho. Podobně se tyto úlohy vyskytují také v rámci tzv. rekreační matematiky a jsou oblíbené třeba při hrách na dětských táborech. V těchto případech poskytuje široká paleta zajímavých úloh značné množství originálních postupů, vedoucích k vyřešení šifry. Dešifrování pak podporuje trpělivost, fantazii, pečlivost a samozřejmě logické myšlení. To vše jsou žádoucí efekty, kvůli kterým má smysl šifry a podobné úkoly řešit.

Pokud se s nejednoznačně zadanou úlohou setkají žáci ve škole, měl by mít učitel důkladně rozmyšleno, jak postupovat. Učitel může takové úlohy zařadit do výuky záměrně a nejednoznačnost řešení na nich demonstrovat. Občas se ale s nezamýšleným a přitom správným řešením může potkat i nechtěně. V takovém případě by měl učitel uznat i jiná než zamýšlená řešení, dovede-li žák svůj postup logicky správně zdůvodnit.

Při přípravě úloh, které jsou opravovány podle šablony, je nutné eliminovat všechny nejednoznačně zadané úlohy. Učitel by měl následně projít s žáky správná řešení a umožnit jim doptat se na případné nejasnosti. Pokud by se stalo, že by nějaká úloha mohla být vyřešena správným postupem, ale s jiným výsledkem než učitel očekával, je samozřejmě potřeba takové řešení uznat a pozitivně jej ohodnotit. Kdyby učitel správné řešení neukazoval, mohlo by se stát, že nějaké žáky nechtěně poškodí. Proto je důležité na demonstraci správných řešení vymezit předem dostatek času.

Problematičtější je, že se úlohy s více možnostmi řešení vyskytují v situacích, kdy na výsledku záleží mnohem více. Problém nastává, pokud je uznávána pouze jedna správná možnost. Z výše uvedených příkladů je zřejmé, že se takovéto úlohy velmi často objevují v IQ testech. Někdo, kdo našel správné řešení, ale jiné než bodované, tak neoprávněně přichází o body, v důsledku čehož mu je naměřena menší hodnota IQ. Nejednoznačně zadané úlohy lze potkat také na Logické olympiádě, což je soutěž, jejíž popularita v poslední době značně roste [2]. Dodejme, že úlohy Logické olympiády nejsou zveřejňovány[2)] a nemohou tak být podrobeny kontrole, pochvale a kritice.

Velmi nežádoucí je, aby se úlohy s více možnými správnými odpověďmi dostaly do testů v rámci různých přijímacích řízení, například na střední školu, na vysokou školu nebo do nového zaměstnání. Takovým úlohám je třeba se vyhnout, neboť případná „dohra“ může dojít až k soudu, viz [4].

Nyní ukážeme příklad slovní úlohy převzaté z oficiálních SCIO testů pro žáky pátých tříd ZŠ, která není vhodná do testu na přijímací řízení, zejména, je-li deklarováno, že každá úloha má právě jedno správné řešení.

Příklad se stromky. Při prohlídce sadu zjistil sadař, že každý čtvrtý stromek uschl. Za každý suchý vysadil dva nové, tedy 276 nových stromků. Kolik stromků bylo pak celkem v sadu?

A) 552   B) 690   C) 728   D) 828   E) 1104

Největším problémem u této úlohy je to, že není zcela jasné, jestli vůbec byly nějaké stromky odstraněny. Pokud ano, pak se nabízí řešení: $3 \cdot 138 + 276 = 690$. Pokud tam stromky zůstaly, pak obdržíme výsledek: $4 \cdot 138 + 276 = 828$. Totiž tvrzení: „za každý suchý vysadil dva nové,“ lze přirozeně interpretovat tak, že každé dva nové stromky byly vysázeny za nějakým suchým stromkem, přičemž suché stromky tam zůstaly. A je tu nejednoznačné řešení. Přísně vzato problematických míst lze najít více. Například z ničeho nevyplývá, že původní počet stromků musí být přesně dělitelný čtyřmi. Do úvahy tak připadá i původní počet neuschlých stromků zvětšený o 1, 2, nebo 3 stromky. Tedy kromě hodnoty 414, lze brát v potaz i hodnoty 415, 416 a 417, neboť ve všech těchto případech, pokud každý čtvrtý stromek uschl, uschlo právě 138 stromků a bylo vysazeno 276 nových stromků. Problém tkví i v tom, že bylo použito slovo

2) Na rozdíl od významné soutěže Matematický klokan [3], kde jsou zveřejňována všechna zadání a správná řešení.

suchý místo slova uschlý. Tato slova mají totiž různý význam. Stromek se může stát suchým, třeba kvůli tomu, že uschne po dešti. V takovém případě jej ale není nutno odstraňovat ze sadu. A naopak po dešti nejsou ani uschlé stromky suché…

Jak tedy zadání pozměnit, aby se eliminovala diskuze kolem možných správných řešení? Například následovně.

Příklad se stromky po úpravě. Při prohlídce sadu zjistil sadař, že přesně každý čtvrtý stromek uschl. Každý uschlý stromek odstranil a vysadil místo něj dva nové, celkem 276 nových stromků. Kolik stromků bylo pak celkem v sadu?

A) 552 B) 690 C) 728 D) 828 E) 1104

Studium matematiky (mimo jiné) učí jednoznačnému a srozumitelnému vyjadřování, což je užitečné i v jiných předmětech a v praktickém životě. S tímto tvrzením úzce souvisí další příklad pocházející od společnosti Cermat, která v současné době připravuje testy pro jednotné přijímací zkoušky i pro státní maturity. V roce 2018 byl odvolán její tehdejší ředitel právě kvůli nejednoznačným úlohám v testech. Uvedeme příklad z testu pro přijímací řízení na osmiletá gymnázia [5].

Příklad s hláskami. Které z následujících slov obsahuje kořen skládající se ze čtyř hlásek?

A) objevili B) zabručel C) rozběhla D) nevydržela

Podle klíče řešení je správná odpověď B, ale také možnost C splňuje zadání, protože nepočítáme písmena, ale hlásky, které vyslovujeme. Tedy: [za**bruč**el], [ros**bjeh**la]. Cermat chybu uznal po upozornění učitelů.

Několik poznámek k doplňování posloupností čísel

V úlohách, kde je třeba logicky doplnit konečnou posloupnost čísel následující hodnotou, je třeba najít pravidlo, které určuje, jak jsou tato čísla seřazena. Nejednoznačnost řešení může snadno vzniknout, pokud není jasné, jaký druh pravidla má být nalezen. Prohlásit přitom, že nějaké řešení je lepší než jiné, je někdy značně diskutabilní. Upozorněme na to, že pokud mají zadané posloupnosti málo čísel (řekněme méně než šest), pak je lze relativně jednoduše libovolně doplňovat. Mnohem těžší bývá jednoduše doplnit posloupnost sestávající z více čísel (řekněme, že jich má alespoň dvacet). K tomu dodejme, že náročnost doplňování může být nahlížena pomocí tzv. kolmogorovské složitosti, což je pojem z oboru teoretické informatiky. V podstatě jde o to, jak efektivně můžeme popsat nebo reprezentovat určitá data pomocí algoritmu. Kolmogorovská složitost je míra složitosti informace obsažené v datech, založená na délce nejkratšího možného programu, který může daná data vygenerovat. Kratší program znamená nižší kolmogorovskou složitost, což znamená, že jsou data jednodušší nebo méně nepravidelná. Naopak delší program signalizuje větší složitost.[3)] Tento koncept je pojmenován po sovětském matematikovi Andreji Nikolajevičovi Kolmogorovi a také je úzce spjat s Gregorym Johnem Chaitinem a Rayem Solomonoffem. Více o kolmogorovské složitosti například viz [7].

Kolmogorovská složitost může být snadno spojena s doplňováním posloupností čísel. Máme-li posloupnost, kterou chceme doplnit, můžeme se pokusit najít nejkratší program (algoritmus), který by tuto posloupnost vygeneroval a měl přitom co možná nejnižší možnou kolmogorovskou složitost. Má-li posloupnost nízkou kolmogorovskou složitost, může to znamenat, že je pravidelná a snadno se doplní její další člen. Naopak složitější nebo náhodnější posloupnost typicky vyžaduje delší program a má tak vyšší kolmogorovskou složitost. V této souvislosti by se úspěšné doplnění dané posloupnosti mohlo interpretovat jako nalezení efektivního způsobu reprezentace posloupnosti pomocí algoritmu s nízkou kolmogorovskou složitostí.

Pro jasnější představu uvedeme dvě konkrétní posloupností o 20 členech:

(a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1,$

(b) $-245, 378, 40, -92, 167, -432, 289, -156, 453, -78, 214, -321, 87, -499, -1235, -267, 189, 392, -50, -464.$

Najít algoritmus, který by postupně generoval posloupnost čísel z bodu (a) je triviální. Stačí vzít posloupnost $(-1)^{n+1}$, kde n je přirozené číslo. První člen této posloupnosti je tedy $(-1)^{1+1} = 1$, druhý je $(-1)^{2+1} = -1$, třetí je $(-1)^{3+1} = 1$ atd. Dopočítat 21. číslo je přímočaré: $(-1)^{21+1} = 1$. Na druhou stranu najít algoritmus, který by postupně generoval všech dvacet čísel z bodu (b), je značně netriviální. Nejkratší by bylo patrně přímé vypsání oněch dvaceti čísel. Jak (a proč) by ale vypadalo v pořadí další, 21. číslo?

3) Přesná hodnota složitosti různých dat je určena také tím, jaký programovací jazyk je předem zvolen, ovšem volba jazyka má jen omezený vliv.

Jak doplnit posloupnost 1, 2, 3, 4, 5?

Podíváme se, jak na doplnění posloupnosti 1, 2, 3, 4, 5 nahlížejí matematici. Jak dále uvidíme, žádné doplňování posloupnosti čísel není jednoznačné. Vždy lze nalézt nekonečně mnoho způsobů, jak danou posloupnost doplnit a daný způsob doplnění logicky zdůvodnit.

Pro dokreslení této situace se nyní podíváme na tři přístupy, které z matematického pohledu zdůvodňují, že posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, 5 může být doplněna libovolným reálným číslem, například číslem π.

První možností je tvrdit, že posloupnost je periodická a vypadá takto:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Druhým zdůvodněním je představení vzorce pro výpočet n-tého členu posloupnosti, například ve tvaru

$$a_n = n + \lfloor n/6 \rfloor \cdot (\pi - n),$$

kde $\lfloor n/6 \rfloor$ značí tzv. dolní celou část čísla $n/6$. Protože je $\lfloor n/6 \rfloor = 0$, pro každé $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\lfloor 6/6 \rfloor = 1$, vypadá prvních šest členů posloupnosti takto: 1, 2, 3, 4, 5, π. Čtenář si snadno rozmyslí, že místo hodnoty π může vzorec obsahovat proměnnou x, která může nabývat libovolné reálné hodnoty a dokonce může být i číslem komplexním. Po prvních pěti přirozených číslech tak může na základě jednoduchého vzorce následovat libovolná číselná hodnota x.

Třetí pohled se týká problematiky prokládání polynomu danými body. To je v našem případě možné provést s využitím nějaké známé interpolační metody, tedy hledáním vhodného interpolačního polynomu, který prochází body o souřadnicích $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 3]$, $[4, 4]$, $[5, 5]$ a $[6, \pi]$. Známý a zdarma přístupný software WolframAlpha [6] ho najde během okamžiku, viz obr. 1.

Dodejme, že pro námi uvažované (krátké) konečné posloupnosti půjde tímto způsobem vždy nalézt jednoznačně určené řešení, které lze relativně snadno algoritmicky vypočítat. Z tohoto úhlu pohledu tedy následovník několika prvních členů číselné posloupnosti může být libovolné námi zvolené číslo a doplnění každé konečné posloupnosti čísel tak má nekonečně mnoho řešení.

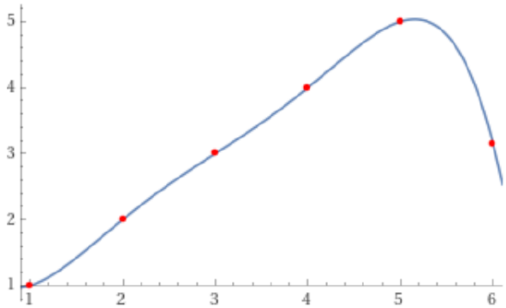
Nejednoznačnost představuje výzvu pro řešitele i pro tvůrce úloh. Zaměřili jsme se na to, kde se můžeme s nejednoznačnými úlohami setkat a odůvodnili jsme, kdy je to vhodné a kdy naopak ne. Za vhodné považujeme využití v oblasti tzv. rekreační matematiky, naopak v testech, kde je deklarováno jediné správné řešení, jsou úlohy s nejednoznačným řešením nevhodné.

interpolating polynomial	$\{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$

Interpolating polynomial

$$\frac{\pi x^5}{120} - \frac{x^5}{20} - \frac{\pi x^4}{8} + \frac{3x^4}{4} + \frac{17\pi x^3}{24} - \frac{17x^3}{4} - \frac{15\pi x^2}{8} + \frac{45x^2}{4} + \frac{137\pi x}{60} - \frac{127x}{10} - \pi + 6$$

Plot of the interpolating polynomial



Obr. 1

Literatura

[1] *Butler, E., Pirie, M.*: Testy IQ. Svoboda – Libertas, Praha, 1993.

[2] Logická olympiáda. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://www.logickaolympiada.cz/.

[3] Matematický klokan. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/.

[4] *Mačí, J.*: Verdikt, který tu ještě nebyl. Spor o maturitu vyhrál u soudu poprvé student. Seznam Zprávy. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://bit.ly/3URJNA7.

[5] 2. řádný termín – osmileté obory gymnázií 2018. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Dostupné z: urlhttps://bit.ly/3P4yGQv [cit. 2024-02-22].

[6] WolframAlpha: Computational Intelligence. [online]. Dostupné z: https://www.wolframalpha.com/. [cit. 2024-02-22].

[7] *Li, M., Vitányi, P.*: An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. 4. vyd., Springer, New York, 2019.