Několik nerovností pro číslo $n!$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

O čísle $n!$ (n-faktoriál) je středoškolákům známo, že pro všechna přirozená čísla $n > 1$ je rovno součinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ a že pro $n = 1$ a $n = 0$ se definuje $1! = 0! = 1$. Vědí rovněž, že toto číslo určuje počet všech permutací z n prvků.

V následujícím textu dokážeme čtyři zajímavé nerovnosti, v nichž číslo $n!$ figuruje. Jsme současně přesvědčeni o tom, že pro některé středoškoláky by tyto důkazy mohly být užitečným cvičením.

Věta 1

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$\sqrt{n^n} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Důkaz. K důkazu nerovnosti $\sqrt{n^n} \leq n!$ vyjádříme druhou mocninu čísla $n!$ jako součin n činitelů tvaru $k \cdot (n-k+1)$, kde přirozené číslo k se mění od 1 do n. Je tedy

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1).$$

Snadnou úpravou zjistíme, že

$$k(n-k+1) - n = (n-k)(k-1).$$

Vzhledem k tomu, že pro všechna $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $(n-k)(k-1) \geq 0$, platí

$$k \cdot (n-k+1) \geq n.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti postupně $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ dostaneme

$$1 \cdot n \geq n,\ \ 2 \cdot (n-1) \geq n,\ \ 3 \cdot (n-2) \geq n,\ \ldots, n \cdot 1 \geq n.$$

Odtud plyne

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot (3 \cdot (n-2)) \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1) \geq n^n,$$

neboli

$$\sqrt{n^n} \leq n!.$$

Důkaz nerovnosti

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

je velmi jednoduchý, známe-li vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem libovolných nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, přesněji nerovnost mezi oběma uvedenými průměry (tzv. AG-nerovnost). Platí totiž

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Dokazovaná nerovnost je pro $n = 1$ splněna triviálně a pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ je ekvivalentní s nerovností

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2},$$

která je však splněna na základě využití AG-nerovnosti pro čísla $1, 2, 3, \ldots, n$. Platí tedy

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} \leq \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Tím je důkaz obou nerovností uzavřen.

Věta 2

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$2^{n-1} \leq n! \leq \frac{n^n}{2^{n-1}}.$$

Důkaz. Platnost nerovnosti $2^{n-1} \leq n!$ je zřejmá téměř bezprostředně. Pro $n = 1$ a $n = 2$ platí a k jejímu ověření pro libovolné přirozené číslo $n > 2$ stačí mocninu 2^{n-1} i číslo $n!$ reprezentovat jako součin $n-1$ činitelů. Platí

$$2^{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \leq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n = n!.$$

Nerovnost $n! \leq n^n/2^{n-1}$ platí pro $n = 1$ i pro $n = 2$. Pro libovolné $n > 2$ přirozené odhadneme výraz $(n-1)!$ užitím AG-nerovnosti pro dvojice čísel $(1, n-1)$, $(2, n-2)$, atd., až $(n-1, 1)$ následujícím způsobem

$$\begin{aligned}(n-1)! &= \sqrt{(n-1)!} \cdot \sqrt{(n-1)!} = \\ &= \sqrt{1 \cdot (n-1)} \cdot \sqrt{2 \cdot (n-2)} \cdot \sqrt{3 \cdot (n-3)} \cdot \ldots \cdot \sqrt{(n-1) \cdot 1} \leq \\ &\leq \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot \frac{2 + (n-2)}{2} \cdot \frac{3 + (n-3)}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1) + 1}{2} = \\ &= \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany odvozené nerovnosti $(n-1)! \leq n^{n-1}/2^{n-1}$ číslem n, obdržíme bezprostředně dokazovanou pravou nerovnost.

Věta 3

Pro všechna přirozená čísla k, n, kde $k \leq n$, platí

$$k!(k+1)^{n-k} \leq n! \leq k!\, n^{n-k}.$$

Důkaz. Všimněme si nejprve, že dané nerovnosti jsou splněny pro $k = n$ a pro $k = n - 1$, tj. $n = k + 1$. Dále budeme tedy předpokládat (kromě $k \leq n$) že $k \neq n$ a $k \neq n - 1$. Umožní nám to vyjádřit mocniny $(k+1)^{n-k}$ a n^{n-k} ve tvaru součinu, neboť z uvedených předpokladů plyne $n - k \geq 2$. Dané nerovnosti jsou zřejmě ekvivalentní s nerovnostmi

$$(k+1)^{n-k} \leq \frac{n!}{k!} \leq n^{n-k}.$$

Vyjádříme-li v nich mocniny $(k+1)^{n-k}$ a n^k jako součin $n - k$ činitelů a zlomek $n!/k!$ zkrátíme výrazem $k!$, dostaneme

$$(k+1)(k+1)(k+1)\ldots(k+1) \leq (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n-1)n \leq n^{n-k}.$$

Protože každý činitel v součinu $(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(n-1)n$ je kromě prvního větší než $k+1$ a každý činitel tohoto součinu je kromě posledního menší než n, jsou uvedené nerovnosti splněny a důsledku toho platí také

$$(k+1)^{n-k} \leq \frac{n!}{k!} \leq n^{n-k},$$

neboli

$$k!(k+1)^{n-k} \leq n! \leq k!\, n^{n-k},$$

což jsme chtěli dokázat.

Intervaly, v nichž podle dokázaných nerovností leží číslo $n!$ jsou však poměrně široké. Připomeňme ještě, že lepší odhad dává tzv. *Stirlingův vzorec*, který pro dostatečně velká n určuje číslo $n!$ poměrně přesně.

$$n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

kde konstanta e je základ přirozených logaritmů. Vystupuje i v následující větě, v níž ukážeme odhad pro součet převrácených hodnot čísel $n!$.

Věta 4

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Důkaz. Vyjdeme z následující nerovnosti, která platí pro všechna přirozená čísla n:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

a každý ze zlomků $1/(k-1)k$ vyjádříme jako rozdíl zlomků $1/(k-1) - 1/k$. Dostaneme tak

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uveďme pro úplnost, že se součtem převrácených hodnot čísel $n!$ se setkáváme při vyjádření Eulerova čísla e (které je základem přirozených logaritmů) nekonečnou řadou. Platí

$$\mathrm{e} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Všimněme si dále, že pro součet prvních $n+1$ členů (pro její $(n+1)$. částečný součet) podle právě dokázané nerovnosti platí

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 3 - \frac{1}{n}\,.$$

To znamená, že číslo (konstanta) e je nejvýše rovno 3, což je ve shodě s tím, že jeho hodnota zaokrouhlená na deset desetinných míst je e = = 2,7182818285.

L i t e r a t u r a

[1] *Sivašinskij, I. Ch.*: Něravěnstva v zadačach (rusky). Nauka, Moskva, 1967.

[2] *Krečmar, V. A.*: Zadačnik po algebre (rusky). Nauka, Moskva, 1968.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice nových úloh završující dvoustovku. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 2. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 199

Největší společný dělitel přirozených čísel a, b, c je 1. Dokažte tvrzení: Jsou-li

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}$$

celá čísla, pak jsou druhými mocninami vhodných přirozených čísel.

Ján Mazák