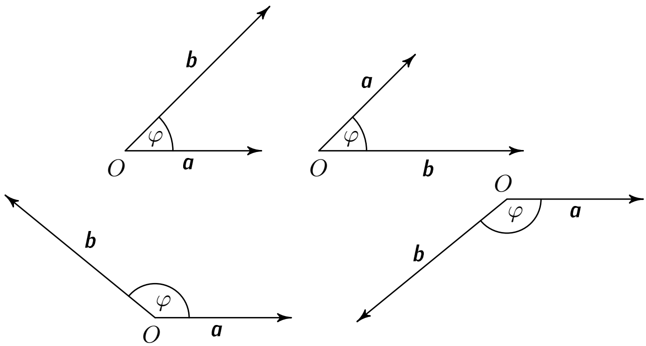
Odchylka dvou vektorů

MILOSLAV ZÁVODNÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto příspěvku uvedeme snadné odvození formule pro výpočet odchylky dvou nenulových vektorů[1)] v rovině pomocí skalárního součinu.

Na rozdíl od odchylky dvou přímek v rovině, která je charakterizována jako úhel ψ, pro který platí $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$, je odchylka dvou nenulových vektorů v rovině definována jako velikost konvexního úhlu φ, který oba vektory svírají, tj. platí $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ (obr. 1).



Obr. 1 Odchylka φ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$

Uvažujme umístění vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ se společným počátkem ve středu kartézské souřadnicové soustavy Oxy v této rovině (obr. 2).

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, přičemž

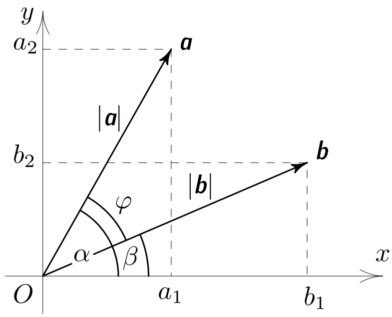
$$a_1 = |\boldsymbol{a}| \cos\alpha, \quad a_2 = |\boldsymbol{a}| \sin\alpha, \quad b_1 = |\boldsymbol{b}| \cos\beta, \quad b_2 = |\boldsymbol{b}| \sin\beta,$$
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

jak je patrné z obr. 2.

Využitím goniometrického vzorce pro kosinus φ, kde $\varphi = \alpha - \beta$, máme (viz obr. 2)

$$\cos\varphi = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{b_1}{|\boldsymbol{b}|} + \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{b_2}{|\boldsymbol{b}|}.$$

1) Někdy též úhel dvou vektorů.



Obr. 2 Vektory v kartézské souřadnicové soustavě

Odchylka φ vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ je tak dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Výraz $a_1b_1 + a_2b_2$ se nazývá *skalární součin* vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a značí se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Platí tedy

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Skutečnost, že pro vypočtenou odchylku vektorů platí $0° \leq \varphi \leq 180°$, garantuje Cauchyho–Schwarzova nerovnost, podle níž pro libovolné dvojice reálných čísel (a_1, a_2), (b_1, b_2) platí $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$. Pro nenulové vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ dostaneme po úpravě

$$\frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \leq 1,$$

tedy

$$-1 \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \cos\varphi \leq 1,$$

a proto $0° \leq \varphi \leq 180°$.

Příklad 1

Vypočtěte odchylku vektorů:

1) $\boldsymbol{a} = (1; \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b} = (-3; 0)$;   2) $\boldsymbol{u} = (1; 3)$, $\boldsymbol{v} = (2; 1)$.

Řešení.

1) $\cos\varphi_1 = -\frac{1}{2}$, tedy $\varphi_1 = 120°$.   2) $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\varphi_2 = 45°$.

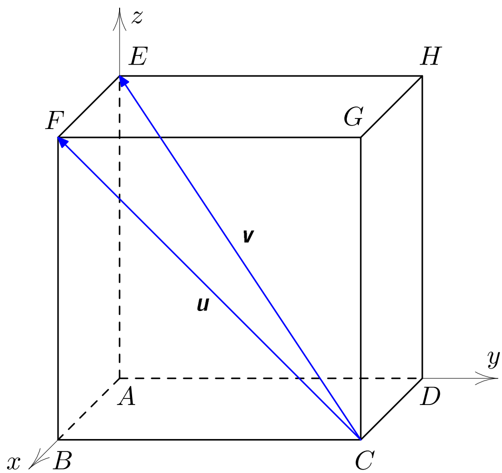
Poznámka. Protože vektor lze reprezentovat jeho libovolným umístěním, mohou mít vhodně zvolená umístění dvou vektorů vždy společný bod. Jejich směry jsou různoběžkami, nebo rovnoběžkami, určujícími rovinu, v níž oba vektory leží. Tedy i dva vektory v prostoru můžeme považovat za vektory ležící v rovině.

V případě trojrozměrných vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kde $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, je jejich skalární součin definován výrazem $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Pro jejich odchylku φ pak platí

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Příklad 2

Je dán kvádr $ABCDEFGH$, viz obr. 3. Vypočtěte odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = CF$, $\boldsymbol{v} = CE$, jestliže $A[0; 0; 0]$, $B[2; 0; 0]$, $D[0; 4; 0]$ a $|AE| = 4$.



Obr. 3

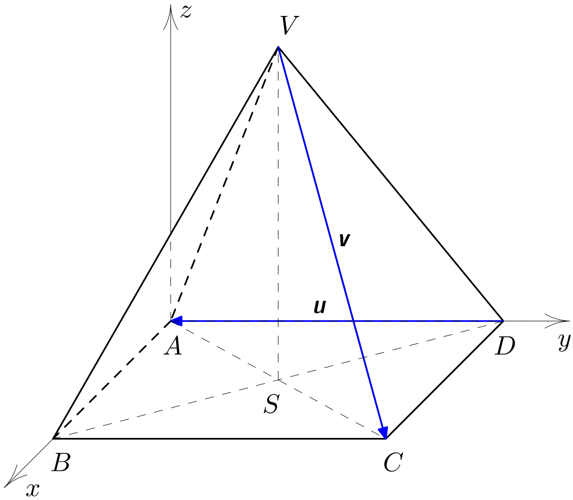
Řešení. Zřejmě $C[2; 4; 0]$, $E[0; 0; 4]$, $F[2; 0; 4]$, tudíž $\boldsymbol{u} = F - C = (0; -4; 4)$ a $\boldsymbol{v} = E - C = (-2; -4; 4)$. Skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 32$, $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{v}| = 6$. Pro odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u} = CF$ a $\boldsymbol{v} = CE$ dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

odkud $\varphi \doteq 19°28'$.

Příklad 3

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož výška je rovna délce hrany jeho podstavy. Vypočtěte odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = DA$ a $\boldsymbol{v} = VC$.



Obr. 4

Řešení. Umístíme jehlan $ABCDV$ do kartézské souřadnicové soustavy, viz obr. 4. Délku hrany podstavy označme $2x$, potom $A[0,0,0]$, $B[2x,0,0]$, $C[2x,2x,0]$, $D[0,2x,0]$, $S[x,x,0]$, $V[x,x,2x]$, $\boldsymbol{u} = A - D = (0,-2x,0)$ a $\boldsymbol{v} = C - V = (x,x,-2x)$. Skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -2x^2$, $|\boldsymbol{u}| = 2x$, $|\boldsymbol{v}| = x\sqrt{6}$. Pro odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u} = DA$ a $\boldsymbol{v} = VC$ dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{-2x^2}{2x \cdot x \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6},$$

odkud $\varphi \doteq 114°5'$.[2)]

Literatura

[1] *Kočandrle, M.*, *Boček, L.*: Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie. JČMF, Prometheus, Praha, 2010.

[2)] Odchylka vektorů $\boldsymbol{u} = DA = CB$ a $-\boldsymbol{v} = CV$ je však $\varphi \doteq 65°55'$. Tu lze získat také pomocí kosinové věty z rovnoramenného trojúhelníku BCV, viz obr. 4.