Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 3. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 297

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)^2} < 1.$$

Pavel Calábek

Úloha 298

Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice o poloměru ϱ. Její tečny rovnoběžné po řadě se stranami a, b, c trojúhelníku z něj vytínají tři menší trojúhelníky, jejichž kružnice vepsané mají poloměry ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Dokažte, že platí

$$\varrho = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c.$$

Josef Polák

Dále uvádíme řešení úloh 293 a 294, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 293

a) Kuchař rozřezal kilogramový bochník sýra na šest dílů vážících alespoň 50 g. Dokažte, že z nich může několik vybrat a rozdělit je na dva talíře tak, aby se hmotnosti sýra v obou talířích lišily méně než 15 g.

b) Na kolik dílů vážících aspoň 1 g musí kuchař tento bochník rozdělit, aby z nich bylo možno několik rozdělit na dva talíře tak, že hmotnosti sýra v obou talířích se liší méně než 1 g? Najděte nejmenší takový počet.

Pavel Calábek

Řešení.

a) Z šesti dílů sýra může kuchař vytvořit $2^6 - 2 = 62$ různých podmnožin, které obsahují jeden až pět dílů, podle zadání o celkových hmotnostech od 50 g do 950 g, tedy v rozsahu 900 g. Tento rozsah kuchař rozdělí na 61 stejných úseků. Jelikož $15 \cdot 61 = 915$, existují podle Dirichletova principu dvě různé podmnožiny, jejichž hmotnosti se nacházejí ve stejném úseku, tedy liší nejvýše o $900/61$ g < 15 g. Pokud z těchto dvou různých podmnožin kuchař odebere případné totožné díly sýra, rozdíl jejich hmotností se nezmění a v každé z nich zbude aspoň jeden díl, protože v opačném případě by jedna z nich byla podmnožinou druhé a jejich hmotnosti by se lišily aspoň o hmotnost jednoho dílu sýra, tedy o 50 g. Když pak kuchař zbývající díly sýra z obou (zmenšených) podmnožin položí dva talíře, jejich hmotnosti se budou lišit o méně než požadovaných 15 g.

b) Stejnou úvahou jako v části a) ukážeme, že pokud kuchař rozdělí bochník sýra na deset dílů, budou existovat jejich dvě různé podmnožiny o jednom až devíti prvcích, které se liší nejvýše o

$$(1000 - 2 \cdot 1)/(2^{10} - 2) \text{ g} = 998/1022 \text{ g} < 1 \text{ g}.$$

Po odstranění společných dílů z nich pak kuchař vytvoří požadované dva talíře. Jestliže se nám podaří ukázat, že z 9 dílů o požadovaných hmotnostech se to vždy nemusí podařit, dokážeme, že nejmenší hledaný počet dílů je deset. Kuchaři se např. může podařit odkrojit z bochníku osm dílů o hmotnostech $2^0 \cdot 1{,}5$ g $= 1{,}5$ g, $2^1 \cdot 1{,}5$ g $= 3$ g, $2^2 \cdot 1{,}5$ g $= 6$ g, $\ldots$, $2^7 \cdot 1{,}5$ g $= 192$ g, zbude mu díl o hmotnosti 617,5 g, která je o 235 g větší než součet hmotností ostatních dílů. Tento zbývající díl se jistě na vyhovujícím talíři nemůže objevit. Z jednoznačnosti zápisu čísel ve dvojkové soustavě dále plyne, že neexistují dvě různé podmnožiny prvních osmi dílů se stejnými hmotnostmi, tedy se liší aspoň o 1,5 g.

Správná řešení zaslali *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Miroslav Holeček*, MG Plzeň, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Václav Kučera*, SChŠ, ZŠ a G Cheb, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Helena Muchová* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova a *Patrik Štencel*, MG Opava.

Neúplná řešení zaslali *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1, *Richard Dobíšek*, MG Praha 6 a *Marek Valkovič*, G Zlín, Lesní čtvrť.

Úloha 294

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os stran AC a AB po řadě s přímkami AB a AC. Dále označme F a G body souměrně sdružené podle bodu A po řadě s vrcholy B a C. Dokažte, že body D, E, F a G leží na téže kružnici.

Patrik Bak

Řešení. Jelikož vnitřní úhel u vrcholu A trojúhelníku ABC je ostrý, leží body D a E po řadě na polopřímkách AB a AC, přitom body F a G leží na polopřímkách opačných. Označme α velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu A a b, c po řadě délky jeho stran AC, AB. Dále nechť jsou S_b a S_c po řadě středy těchto stran. Z pravoúhlých trojúhelníků AS_bD a AS_cE plyne

$$|AD| = \frac{|AS_b|}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}b}{\cos\alpha},$$

podobně

$$|AE| = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\alpha}.$$

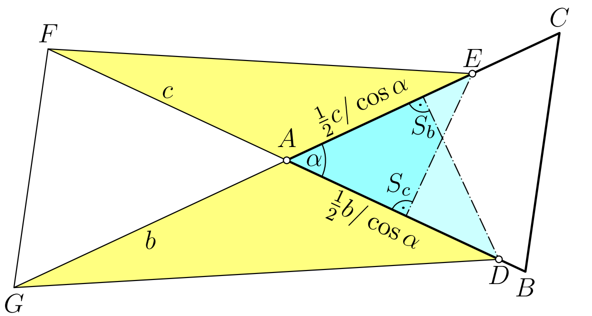
Ze středové souměrnosti se středem A dále dostáváme

$$|AF| = |AB| = c \quad \text{a} \quad |AG| = |AC| = b.$$

Proto

$$|AE| \cdot |AG| = \frac{bc}{2\cos\alpha} = |AD| \cdot |AF|.$$

Rovnost těchto součinů je podle věty o mocnosti bodu A ke kružnici postačující (i nutnou) podmínkou k dokazovanému tvrzení, tedy že body D, E, F a G leží na téže kružnici.



Poznámka 1. Místo věty o mocnosti bodu ke kružnici můžeme také dokončit důkaz následujícím způsobem. Trojúhelníky ADG a AEF mají shodný vnitřní úhel u vrcholu A (o velikosti $180^\circ - \alpha$) a stejný poměr stran

$$\frac{|AG|}{|AD|} = 2\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AE|}.$$

Jsou tak podobné, mají shodné vnitřní úhly a úsečka FG je vidět z bodů D a E (ležících v polorovině FGA) pod stejným úhlem, což opět dokazuje tvrzení – nyní pod le věty o obvodovém úhlu.

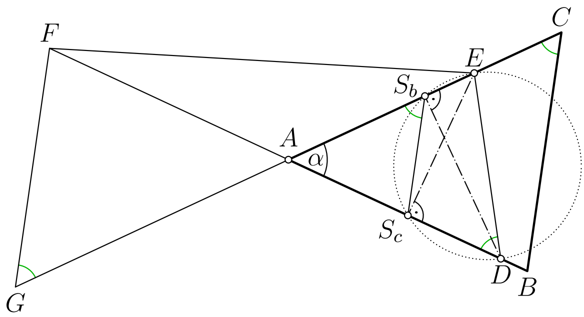
Poznámka 2. Můžeme také ukázat, že poloměr r' kružnice opsané čtyřúhelníku $DEFG$ závisí pouze na poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC a velikosti úhlu α. Podle kosinové věty v trojúhelníku AGD platí

$$\begin{aligned}|DG|^2 &= |AD|^2 + |AG|^2 - 2|AD|\cdot|AG|\cos(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{b^2}{4\cos^2\alpha} + b^2 + b^2 = b^2\left(2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}\right).\end{aligned}$$

Trojúhelníky ABC a AFG jsou ze středové souměrnosti vzhledem k vrcholu A shodné, velikost vnitřního úhlu GFA je tak shodná s velikostí vnitřního úhlu ABC. Podle (zobecněné) sinové věty platí

$$r' = \frac{|DG|}{2\sin|\sphericalangle GFD|} = \frac{b}{2\sin|\sphericalangle ABC|}\sqrt{2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}} = r\sqrt{2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}}.$$

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení označme S_b a S_c po řadě středy stran AC a AB. Ze středové souměrnost určující body F a G plyne, že trojúhelníky AFG a ABC jsou shodné. Tedy jsou shodné i jejich vnitřní úhly AGF a ACB. Ostroúhlý trojúhelník ABC je stejnolehlý s trojúhelníkem AS_cSb, body D a E tak leží po řadě na polopřímkách S_cB a S_bC a souhlasné úhly ACB a AS_bS_c jsou shodné. Úhly DS_bE a DS_cE jsou podle zadání pravé, podle Thaletovy věty tak leží body S_b a S_c na (polo)kružnici s průměrem DE. Čtyřúhelník DES_bS_c je tak tětivový a součet velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů D a S_b je 180°, úhly AS_bS_c a EDA jsou proto shodné. Tedy úhly FGE a FDE jsou shodné, což vzhledem k tomu, že body G a D leží v polorovině EFA, stačí podle věty o obvodovém úhlu k platnosti dokazovaného tvrzení, tedy že body D, E, F, G leží na téže kružnici.



Poznámka 3. Autor vytvořil úlohu pomocí svého programu `GeoGen`.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michaloviců, *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Albert Bakoč*, GChD Praha 5, *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Barbora Herynková* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Mikuláš Hořenek*, WG Ostrava, *Lukáš Komín*, G Praha 4, Opatov, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova, *Patrik Štencel*, MG Opava a *Martin Vořechovský*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek