Všimněme si dále, že pro součet prvních $n+1$ členů (pro její $(n+1)$. částečný součet) podle právě dokázané nerovnosti platí

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leq 3-\frac{1}{n}\,.$$

To znamená, že číslo (konstanta) e je nejvýše rovno 3, což je ve shodě s tím, že jeho hodnota zaokrouhlená na deset desetinných míst je e = = 2,7182818285.

Literatura

[1] *Sivašinskij, I. Ch.*: Něravěnstva v zadačach (rusky). Nauka, Moskva, 1967.

[2] *Krečmar, V. A.*: Zadačnik po algebre (rusky). Nauka, Moskva, 1968.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice nových úloh završující dvoustovku. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 2. 2014 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 199

Největší společný dělitel přirozených čísel a, b, c je 1. Dokažte tvrzení: Jsou-li

$$\frac{ab}{c},\quad \frac{bc}{a},\quad \frac{ca}{b}$$

celá čísla, pak jsou druhými mocninami vhodných přirozených čísel.

Ján Mazák

Úloha 200

Pro komplexní číslo z platí

$$z + \frac{1}{z} = -1.$$

Určete

$$z^{2013} + \frac{1}{z^{2013}}.$$

Stanislav Trávníček

Dále uvádíme řešení úloh 193 a 194, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle tohoto (22.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 193

Dokažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \end{aligned}$$

s neznámými x, y, z a reálnými parametry a, b má reálné řešení, právě když platí

$$\left|\frac{a}{b}\right| \le \sqrt{3}.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Z nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem reálných čísel x, y, z plyne

$$\left|\frac{a}{3}\right| = \left|\frac{x+y+z}{3}\right| \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \left|\frac{b}{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{b\sqrt{3}}{3}\right|,$$

odkud po úpravě přímo plyne nerovnost

$$\left|\frac{a}{b}\right| \le \sqrt{3}.$$

Naopak z této nerovnosti plyne $\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2 \ge 0$. Pak například trojice reálných čísel

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}a - \sqrt{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2}, \frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a + \sqrt{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{6}a^2}\right)$$

reálným řešením dané soustavy, což ověříme dosazením.

Jiné řešení. Množinou všech bodů prostoru, jejichž souřadnice (x, y, z) vyhovují rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ je kulová plocha se středem $(0; 0; 0)$

a poloměrem $|b|$. Analogicky, množinou všech bodů prostoru, které vyhovují rovnici $x + y + z = a$ je rovina. Tato rovina protíná danou kulovou plochu (a tedy soustava rovnic má řešení), právě když je její vzdálenost od bodu $(0; 0; 0)$ nejvýše rovna poloměru koule $|b|$. Podle známého vzorce z analytické geometrie tedy

$$\left|\frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right| \leq |b|.$$

Snadnou úpravou tohoto vztahu dostaneme požadovanou nerovnost, tj.

$$\left|\frac{a}{b}\right| \leq \sqrt{3}.$$

Poznámka. Rovina $x + y + z = a$ prochází body $A_1 = (a; 0; 0)$, $A_2 = (0; a; 0)$ a $A_3(0; 0; a)$, které spolu s bodem $V = (0; 0; 0)$ tvoří pravidelný trojboký jehlan, jehož stěny u vrcholu V jsou navzájem kolmé. Vzdálenost vrcholu V od roviny $A_1A_2A_3$ pak můžeme také snadno vypočítat dvojím vyjádřením objemu jehlanu $A_1A_2A_3V$.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z G v Karviné.

Úloha 194

Žáci dostali za domácí úkol zvolit si tři kladná reálná čísla, pak vypočítat podíly libovolných dvou z nich, přičíst k nim třetí číslo a všech šest možných výsledků napsat do sešitu. Petr vypočítal čísla $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4, \frac{20}{3}$. Pan učitel se podíval na Petrovy výsledky a řekl, že má ve výpočtu chybu. Petr znovu zopakoval výpočty (teď už správně) a zjistil, že v jedné hodnotě opravdu chybu udělal. Jak mohl pan učitel bez znalosti tří Petrových čísel zjistit, že Petr udělal chybu? Se kterými čísly Petr počítal?

Pavel Calábek

Řešení. Označme Petrova zvolená čísla a, b, c a šest vypočtených (správných) výsledků A, B, C, D, E a F. Platí

$$\frac{a}{b} + c = A, \quad \text{neboli} \quad a + bc = Ab,$$

$$\frac{b}{c} + a = B, \quad \text{neboli} \quad b + ca = Bc,$$

$$\frac{c}{a} + b = C, \quad \text{neboli} \quad c + ab = Ca,$$

$$\frac{a}{c} + b = D, \quad \text{neboli} \quad a + cb = Dc,$$

$$\frac{c}{b} + a = E, \quad \text{neboli} \quad c + ba = Eb,$$

$$\frac{b}{a} + c = F, \quad \text{neboli} \quad b + ac = Fa.$$

Vynásobením prvních tří rovnic dostaneme

$$(a + bc)(b + ca)(c + ab) = AbBcCa.$$

Podobně vynásobením posledních tří rovnic dostaneme po úpravě

$$(a + bc)(b + ca)(c + ab) = DcFaEb.$$

Odtud již nutně platí $ABCabc = DEFabc$, tedy $ABC = DEF$. O šesti výsledcích tedy pan učitel ví, že mohou být správně, právě když součin některých tří z nich je roven součinu tří zbývajících. Pro konkrétní Petrovu šestici se může podívat na zlomky, jejichž čitatel či jmenovatel jsou dělitelné 3. Ty jsou tři $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{3}$. Nikdy nemůže rozdělit Petrova čísla do dvou trojic tak, aby součin trojic měl ve jmenovateli stejnou mocninu čísla 3, proto Petr ve výpočtu chybil.

Nyní předpokládejme, že čísla a, b, c jsou označena tak, že Petr udělal chybu v šestém výpočtu. Z první a čtvrté rovnice plyne $Ab = a + bc = Dc$, tedy $\frac{b}{c} = \frac{D}{A}$. Ze druhé a páté rovnice plyne

$$B - \frac{D}{A} = B - \frac{b}{c} = a = E - \frac{c}{b} = E - \frac{A}{D},$$

neboli

$$B - E = \frac{D}{A} - \frac{A}{D}.$$

Vypočítejme všechny rozdíly dvou Petrových výsledků (stačí odečítat pouze menší číslo od většího). Dostaneme tak čísla

$$\frac{1}{6}, 2, \frac{17}{6}, \frac{7}{2}, \frac{37}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 6, \frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{25}{6}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}.$$

Podobně vypočteme všechny možné hodnoty výrazu $\frac{D}{A} - \frac{A}{D}$ pro všechny možné Petrovy výsledky (stačí kladné). Dostaneme tak hodnoty

$$\frac{7}{12}, \frac{24}{5}, \frac{391}{60}, \frac{63}{8}, \frac{1591}{120}, \frac{209}{60}, \frac{24}{5}, \frac{35}{6}, \frac{99}{10}, \frac{7}{12}, \frac{39}{40}, \frac{55}{24}, \frac{11}{30}, \frac{3}{2}, \frac{16}{15}.$$

Zjistili jsme, že v obou řadách se nachází pouze číslo $\frac{3}{2}$. Přitom platí

$$\frac{3}{2} = 4 - \frac{5}{2} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}} - \frac{\frac{10}{3}}{\frac{20}{3}}.$$

Pro čtveřice (A, B, D, E) tak mohou nastat dvě možnosti. Buď

$$(A, B, D, E) = \left(\frac{10}{3}, 4, \frac{20}{3}, \frac{5}{2}\right), \quad \text{nebo} \quad (A, B, D, E) = \left(\frac{20}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4\right).$$

To znamená, že pro číslo $a = B - \frac{D}{A} = E - \frac{A}{D}$ v obou případech platí $a = 2$. Pro podíl $\frac{b}{c} = \frac{D}{A}$ platí buď $\frac{b}{c} = 2$, nebo $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$.

Třetí rovnici původní soustavy upravíme na tvar

$$b = \frac{Ca}{\frac{c}{b} + a},$$

kde C je jedno z čísel $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Pro $C = \frac{1}{2}$ dostaneme dvojice

$$(b, c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

$$(b, c) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Pro $C = \frac{2}{3}$ podobně dostaneme dvojice

$$(b, c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

a

$$(b, c) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

První, druhá a čtvrtá dvojice jsou ovšem ve sporu s první rovnicí původní soustavy $\frac{a}{b} + c = A$.

Závěr: Petr zvolil čísla $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$ a chybu udělal ve výpočtu $\frac{b}{a} + c = \frac{5}{6}$, místo něj chybně napsal $\frac{1}{2}$.

Správné řešení zaslal *Jozef Mészáros* z Jelky.