MATEMATIKA

Motýlí křídla v lichoběžníku

JAROSLAV ŠVRČEK – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezi speciální čtyřúhelníky v rovině, s nimiž se žáci často setkávají při výuce planimetrie již od základní školy, patří *lichoběžníky*. Jsou to všechny konvexní čtyřúhelníky, které mají *právě jednu dvojici* protilehlých stran, jež jsou rovnoběžné (základny lichoběžníku).

V tomto článku se seznámíme s jednou důležitou vlastností lichoběžníků, která nachází široké uplatnění přímo ve školské praxi, ale také při řešení náročnějších úloh v různých matematických soutěžích na ZŠ i SŠ. Tato vlastnost však není v našich učebnicích geometrie pro ZŠ a SŠ speciálně zmiňována. Zde ji uvedeme ve formě dvou praktických tvrzení s následnými ukázkami jejich přímých aplikací.

Věta 1 (motýlí křídla)

V libovolném lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde M značí průsečík jeho úhlopříček AC a BD, mají trojúhelníky BCM a DAM stejné obsahy.

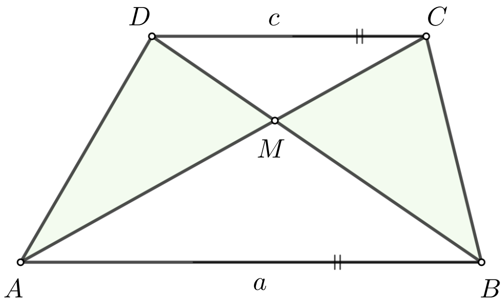
Důkaz. Obsah libovolného trojúhelníku XYZ (čtyřúhelníku $XYZU$) budeme v celém příspěvku značit S_{XYZ} (S_{XYZU}).

Vzhledem k tomu, že vrcholy C, D lichoběžníku $ABCD$ leží na rovnoběžce se stranou AB, mají trojúhelníky ABC a ABD stejné obsahy, tj. $S_{ABC} = S_{ABD}$. Z této rovnosti plyne (viz obr. 1)

$$S_{ABM} + S_{BCM} = S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ABM} + S_{DAM}.$$

Odtud již bezprostředně dostáváme $S_{BCM} = S_{DAM}$, což bylo třeba dokázat.

Poznámka. Dvojice trojúhelníků BCM a DAM v lichoběžníku $ABCD$ připomíná *motýlí křídla* (viz obr. 1), odtud pracovní pojmenování uvedené věty.



Obr. 1

Platí však také následující věta:

Věta 2

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž M je průsečík jeho úhlopříček. Mají-li trojúhelníky BCM a DAM stejný obsah, je $ABCD$ buďto lichoběžník se základnami AB a CD, nebo rovnoběžník.

Důkaz lze vést formálním obrácením postupu v důkazu věty 1, a proto jej ponecháváme zájemcům z řad čtenářů.

V další části uvádíme pět řešených úloh, kde podstatným způsobem využijeme tvrzení věty 1, popř. myšlenky jejího důkazu.

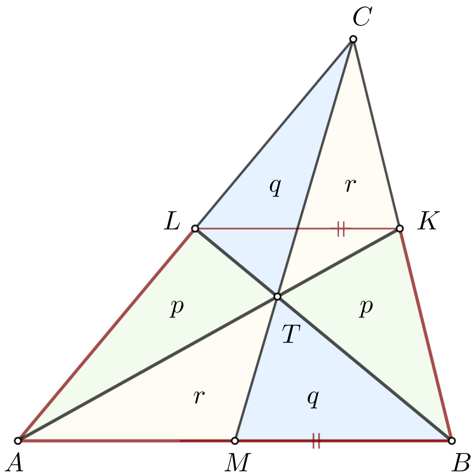
Příklad 1

Dokažte, že těžnice trojúhelníku dělí tento trojúhelník na šest menších trojúhelníků se stejným obsahem.

Řešení. Uvedeme zde postup, který nevyužívá známý poznatek, že těžiště trojúhelníku dělí každou těžnici v poměru $2:1$. (To bude naopak bezprostředním důsledkem výsledku našeho příkladu.)

Označme T těžiště trojúhelníku ABC a K, L, M po řadě středy jeho stran BC, CA, AB (obr. 2). Úsečka KL je střední příčkou v tomto trojúhelníku, která je rovnoběžná se stranou AB, a proto $ABKL$ je lichoběžník, v němž podle věty 1 platí $S_{ALT} = S_{BKT}$.

Označme $p = S_{ALT} = S_{BKT}$. Analogicky také označíme $q = S_{BMT} = S_{CLT}$ a $r = S_{CKT} = S_{AMT}$. Z rovnosti $|AM| = |BM|$ plyne $S_{AMT} = S_{BMT}$, neboli $r = q$; podobně z rovnosti $|BK| = |CK|$ plyne $p = r$. Dohromady tak platí $p = q = r$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 2

Příklad 2

V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, kde je $|AB| = a$, $|CD| = c$, a v němž M značí průsečík jeho úhlopříček. Pomocí délek a a c vyjádřete hodnotu postupného poměru

$$S_{ABM} : S_{BCM} : S_{CDM} : S_{DAM}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že trojúhelníky ABM a CDM jsou podle věty *uu* podobné s poměrem podobnosti $a : c$, viz obr. 1. Pro poměr jejich obsahů pak platí

$$S_{ABM} : S_{CDM} = a^2 : c^2. \tag{1}$$

Navíc také platí

$$|AM| : |CM| = |BM| : |DM| = a : c.$$

Odtud pro poměr obsahů trojúhelníků ABM a BCM dostáváme

$$S_{ABM} : S_{BCM} = |AM| : |CM| = a : c = a^2 : ac. \tag{2}$$

Podobně rovněž platí

$$S_{BCM} : S_{CDM} = |BM| : |DM| = a : c = ac : c^2. \tag{3}$$

Podle věty 1 platí $S_{BCM} = S_{DAM}$, proto hledaný postupný poměr získáme snadno spojením vztahů (1)–(3).

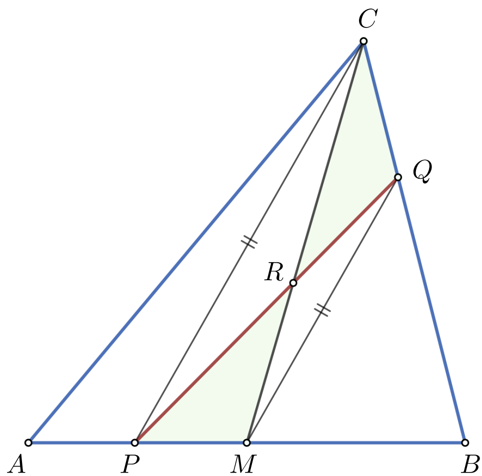
Závěr. Hledaný postupný poměr obsahů trojúhelníků je tedy

$$S_{ABM} : S_{BCM} : S_{CDM} : S_{DAM} = a^2 : ac : c^2 : ac.$$

Příklad 3

Je dán trojúhelník ABC a vnitřní bod P jeho strany AB. Sestrojte přímku, která prochází bodem P a současně dělí daný trojúhelník na dva útvary se stejným obsahem.

Řešení. Označme M střed strany AB. Je-li $P = M$, je zřejmě CP jedinou hledanou přímkou, která dělí daný trojúhelník na dva trojúhelníky (AMC a BMC) o stejném obsahu.



Obr. 3

Zabývejme se nyní případem, kdy $P \neq M$ a uvažujme polohu bodu P stejnou jako na obrázku, tj. P je vnitřním bodem úsečky AM (analogicky lze postupovat, je-li P vnitřním bodem úsečky BM). V tomto případě je evidentně druhý krajní bod Q hledané příčky PQ vnitřním bodem strany BC. Uvažujme rovnoběžku s PC procházející středem M strany AB. Její průsečík se stranou BC označme Q. Čtyřúhelník $PMQC$ je lichoběžník se základnami PC a MQ. Pro průsečík R jeho úhlopříček podle věty 1 platí $S_{PRM} = S_{CRQ}$. Ukážeme, že PQ je jediná příčka požadované vlastnosti.

Vzhledem k tomu, že $S_{AMC} = S_{BMC}$ a $S_{PMR} = S_{CQR}$, platí, viz obr. 3

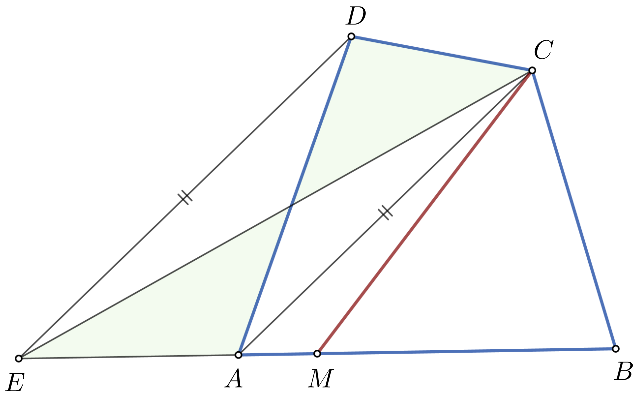
$$\begin{aligned} S_{APQC} &= S_{APRC} + S_{CQR} = S_{APRC} + S_{PMR} = S_{AMC} = \\ &= S_{BMC} = S_{BMRQ} + S_{CQR} = S_{BMRQ} + S_{PMR} = S_{BPQ}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 4 (viz [2], popř. [3])

Sestrojte přímku procházející vrcholem C daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, která dělí tento čtyřúhelník na dvě části (dva útvary) se stejným obsahem.

Řešení. Hledaná přímka procházející vrcholem C, která vyhovuje podmínkám úlohy, protíná (v bodě M) buď stranu AB (platí-li $S_{ABC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$), nebo stranu AD (pokud $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}S_{ABCD}$). Úlohu nyní vyřešíme za předpokladu, kdy nastane první případ, viz obr. 4.



Obr. 4

Na polopřímce BA za bodem A najdeme (sestrojíme) takový bod E, pro který je obsah trojúhelníku EBC roven obsahu daného čtyřúhelníku $ABCD$. Rovnoběžka s AC, která prochází vrcholem D, protíná polopřímku BA v hledaném bodě E. Čtyřúhelník $EACD$ je totiž lichoběžník se základnami AC a DE, v němž trojúhelníky ACD a ACE mají stejné obsahy (neboť mají shodné výšky ke společné straně AC). Platí tudíž

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + S_{ACE} = S_{EBC},$$

což jsme chtěli ukázat.

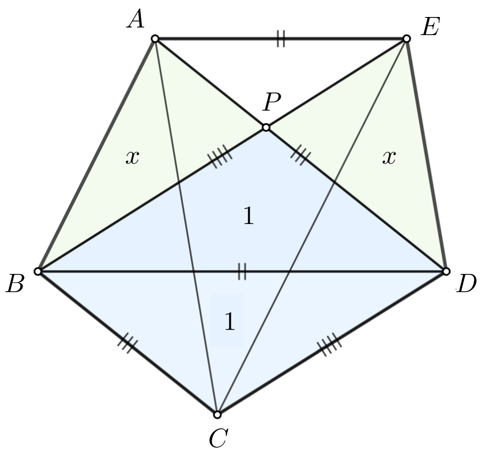
Druhým krajním bodem (M) hledané příčky CM konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je pak (díky rovnosti obsahů trojúhelníku EBC a čtyřúhelníku $ABCD$) střed strany EB získaného trojúhelníku EBC, viz obr. 4.

Poznámka. Snadno vidíme, že případ, kdy $S_{ABC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, je ekvivalentní situaci, kdy M je bodem úsečky (strany) AB. Pokud $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, je $M = A$. V případě, že stejný postup použijeme i ve druhém případě, tj. $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, leží střed M úsečky EB vně strany AB. V takovém případě je nutno zkonstruovat bod E na polopřímce DA za bodem A a bod M hledat jako střed úsečky DE.

Příklad 5 (Kazašská MO, 2004/2005, viz [1])

Daný konvexní pětiúhelník je každou ze svých úhlopříček rozdělen na čtyřúhelník a trojúhelník, který má obsah 1. Určete obsah tohoto pětiúhelníku.

Řešení. Uvažujme konvexní pětiúhelník $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P, viz obr. 5.



Obr. 5

Podle zadání mají trojúhelníky ABE a AED stejné (jednotkové) obsahy. Vrcholy B a D uvažovaného pětiúhelníku leží proto na rovnoběžce s AE, tj. $BD \parallel AE$. Čtyřúhelník $ABDE$ je tedy lichoběžník se základnami AE a BD. Analogicky lze dokázat, že také $AD \parallel BC$ a $CD \parallel BE$. Odtud bezprostředně plyne, že čtyřúhelník $BCDP$ je rovnoběžník. Vzhledem k tomu, že $S_{BCD} = 1$, je $S_{DPB} = 1$, a tedy $S_{BCDP} = 2$.

Označme $x = S_{ABP} = S_{DEP}$, potom $S_{EAP} = 1 - x$. Pro obsahy trojúhelníků ABP, EAP, BDP a DEP pak platí

$$\frac{x}{1-x} = \frac{S_{ABP}}{S_{EAP}} = \frac{|BP|}{|EP|} = \frac{S_{BDP}}{S_{DEP}} = \frac{1}{x},$$

což po úpravě vede k řešení kvadratické rovnice

$$x^2 + x - 1 = 0$$

s jediným *kladným* reálným kořenem $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

ZÁVĚR. Pro obsah S pětiúhelníku $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy, tak platí

$$S = S_{BCDP} + S_{ABP} + S_{DEP} + S_{EAP} = 2 + x + x + (1 - x) = 3 + x = \\ = 3 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}).$$

Upozorňujeme čtenáře, že další přímé aplikace vět 1 a 2 lze nalézt mj. mezi úlohami naší MO (např. v ročence 53. ročníku MO, úloha C–I–2, autor *J. Švrček*) nebo úloha č. 295 z rubriky *Zajímavé matematické úlohy* našeho časopisu, jejímž autorem je *J. Kalinowski.* Řešení této úlohy najdete v tomto čísle MFI (ve stejnojmenné rubrice).

Zájemcům o uvedenou problematiku je určena také poslední (bonusová) úloha, při jejímž řešení lze využít výsledku příkladu 4.

Příklad 6

Nechť P je vnitřním bodem strany CD daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Sestrojte přímku, která prochází bodem P a současně dělí daný čtyřúhelník na dva útvary se stejným obsahem.

[*Návod.* Je třeba rozlišit 3 případy: a) pro druhý krajní bod Q hledané příčky PQ platí $Q \in \overline{DA}$, právě když $S_{APD} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, b) $Q \in \overline{BC}$, právě když $S_{BPC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, c) $Q \in \overline{AB}$ ve všech ostatních případech.]

Literatura

[1] *Kungožin, A. M., Kungožin, M. A.*: Rajonnaja olimpiada škol'nikov po matematike, 2000–2018 (rusky). Daryn, Astana, 2018.

[2] *Maška, O.*: Řešené úlohy z matematiky – Planimetrie. SNTL, Praha 1959.

[3] *Walker, A., Millar, J.*: A New Course in Geometry. Longmans, Green and Co. Ltd, London, 1954.