# Ruinování hráče v hazardní hře

*PAVEL TLUSTÝ – JÁN GUNČAGA*

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Pedagogická fakulta UK, Bratislava

*Pochopení základních principů hazardních her je jeden ze způsobů ochrany proti gamblerství. Umožňuje hráči racionálně myslet a vrátit se zpět do reality.*

V dnešní době existuje nepřeberné množství hazardních her – ruleta, keno, craps, chuck-a-luck, sportka, šťastných 10, různé kostkové hry, hrací automaty a mnohé další. Všechny tyto hazardní hry mají jedno společné – jejich matematický model je vytvořen tak, aby „střední hodnota“ výhry byla pro provozovatele hazardní hry (kasino) kladná. Provozovatel má (při mnoha opakováních hry) zaručen zisk s velmi vysokou pravděpodobností. To však v *žádném případě neznamená*, že musí být nutně všichni účastníci hry pokaždé ve ztrátě.

I když je každá hazardní hra pro hráče nevýhodná, přece jen mezi nimi existují významné rozdíly. Ty spočívají zejména v tom, jaká část z hráčem vložené částky připadne „v průměru“ provozovateli hry. Následující tabulka ukazuje porovnání některých hazardních her právě z tohoto úhlu pohledu.

| název hry | podíl z hráčova vkladu, který připadne v „průměru“ provozovateli |
|---|---|
| francouzská ruleta | 2,7 % |
| americká ruleta | 5,3 % |
| chuck-a-luck | 7,9 % |
| hrací automaty | od 20 % (v závislosti na typu) |
| keno, šťastných 10 | i 50 % (v závislosti na výplatní tabulce) |

Tab. 1. Porovnání „výhodnosti“ hazardních her

Vidíme, že francouzská ruleta je pro hráče nejlepším možným výběrem, neboť v průměru prohrává jen 2,7 % z vsazené částky. To je přijatelná suma, na kterou lze nahlížet jako na poplatek za možnost si zahrát a pobavit se.

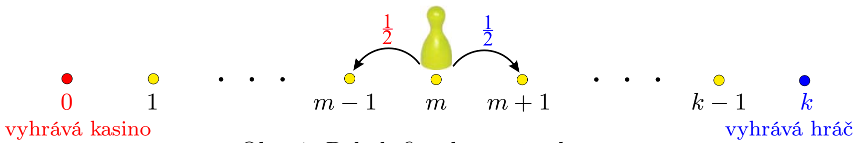
Podívejme se, jaké jsou šance hráče v kasinu vyhrát. Zajímá nás porovnání šancí na výhru kasina a hráče v sérii několika her, jak se během hry mění kapitál hráče, jak rychle hráči v kasinu prohrávají svůj kapitál, jak tato rychlost závisí na typu hazardní hry atd. Podobné otázky nejsou nové a v matematické literatuře se objevily již před více než 100 lety. Bývá zvykem souhrnně označovat tuto problematiku jako *ruinování hráče*. Začneme jednoduchým příkladem.

**Příklad 1**

Hráč hází mincí. Hodí-li „rub“, vyplatí mu kasino 1 Kč, padne-li mu „líc“, zaplatí 1 Kč kasinu. Na začátku má hráč $m$ Kč, počáteční majetek kasina pro tuto hru je $(k-m)$ Kč.[1] Hra skončí ve chvíli, kdy hráč nebo kasino prohraje všechny peníze (ruinování hráče). Jaké jsou šance hráče na vítězství ve hře?

Průběh hry si můžeme představit jako pohyb figurky po číselné ose. Dohromady se hraje o $k$ Kč. Obr. 1 je vytvořen z pohledu hráče. Na začátku hry má hráč $m$ Kč (figurka stojí v bodě $m$).

1. Pokud padne „$r$“, hráč dostane 1 Kč, tj. má celkem $(m+1)$ Kč a figurka se přesune do bodu $m+1$.
2. Padne-li „$l$“, hráč prohraje 1 Kč, figurka se přesune do bodu $m-1$.
3. Hra končí ve chvíli, když se figurka dostane buď do bodu 0, nebo do bodu $k$.




Obr. 1 Pohyb figurky po číselné ose

Označme $p_m = P(\text{figurka stojící v bodě } m \text{ se dostane do bodu } k)$, $m = 0, 1, \ldots, k$. Z obr. 1 vyplývá rovnost

$$p_m = \frac{1}{2}p_{m-1} + \frac{1}{2}p_{m+1} \tag{1}$$

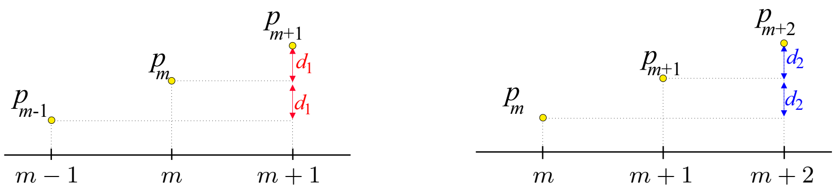
s počátečními podmínkami $p_0 = 0$ a $p_k = 1$. Vztah (1) se nazývá *lineární diferenční rovnice 2. řádu*. Čtenář seznámený s teorií diferenčních rovnic může nalézt řešení $p_m$ právě tímto způsobem.

1) Reálně je kapitál kasina téměř „neomezený“. Podmínku, že kasino má na danou hru jen $(k-m)$ Kč, lze realizovat tak, že hráč po dosáhnutí $k$ Kč hru dobrovolně ukončí.

Ukážeme si jinou možnost, jak tuto diferenční rovnici vyřešit. Z (1) vyplývá, že posloupnost čísel $p_m, m = 0, 1, \ldots, k$ splňuje vztah

$$p_m = \frac{1}{2}\Big(p_{m-1} + p_{m+1}\Big), \tag{2}$$

což znamená, že $p_m$ je aritmetickým průměrem $p_{m-1}$ a $p_{m+1}$. Podobně $p_{m+1}$ je aritmetickým průměrem $p_m$ a $p_{m+2}$.




a) vztah (2) pro $p_m$ b) vztah (2) pro $p_{m+1}$

Obr. 2

Z obr. 2a) vidíme, že platí rovnost $p_{m+1} = p_m + d_1$, z obr. 2b) dostaneme $p_{m+1} = p_m + d_2$. Odtud je zřejmé, že $d_1 = d_2$, tedy rozdíl dvou sousedních členů uvedené posloupnosti je konstantní. Posloupnost $(p_m)_{m=0}^{k}$ tedy je aritmetickou posloupností a platí:

$$p_m = p_0 + m \cdot d, \tag{3}$$

kde $d$ je neznámá diference. Po dosazení okrajových podmínek $p_0 = 0$ a $p_k = 1$ do vztahu (3) vypočteme, že $d = \frac{1}{k}$, a dostaneme hledanou pravděpodobnost

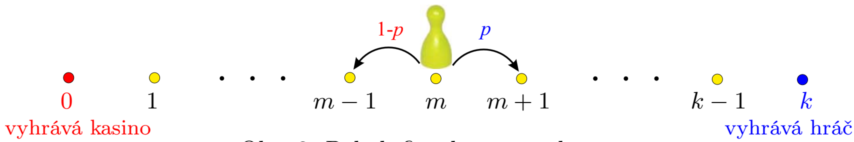
$$p_m = \frac{m}{k}, \quad m = 0, 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Hráč zruinuje kasino s pravděpodobností $\frac{m}{k}$, zatímco kasino zruinuje hráče s pravděpodobností $(1 - \frac{m}{k}) = \frac{k-m}{k}$.

Z příkladu 1 plyne, že ve *spravedlivé hře* (oba soupeři vyhrávají dílčí partie s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$) je pravděpodobnost zruinování hráče přímo úměrná velikosti jeho počátečního kapitálu. Z tohoto úhlu pohledu je šance běžného hráče „zruinovat“ kasino mimo realitu. Uvědomme si navíc, že kasina *žádnou spravedlivou hru* nenabízejí. Ve skutečnosti je v každé partii střední hodnota výhry kasina kladná. V následujícím příkladu si ukážeme, že i velmi malé „vychýlení“ od spravedlivé hry v podstatě nedává hráči reálnou šanci v dlouhodobějším horizontu uspět ve hře proti kasinu.

**Příklad 2**

Hráč hraje v kasinu posloupnost partií, jejichž výsledek záleží na náhodě, a výsledky jednotlivých partií jsou navzájem nezávislé. Pravděpodobnost, že v jednotlivé partii zvítězí, je $p < \frac{1}{2}$. Za každou výhru v partii dostane hráč od kasina 1 Kč. Za každou prohru naopak zaplatí 1 Kč kasinu. Počáteční majetek hráče je $m$ Kč, počáteční majetek kasina pro tuto hru je $(k - m)$ Kč. Hra skončí ve chvíli, kdy jeden z účastníků prohraje všechny peníze. Jaké jsou šance hráče na vítězství ve hře?




Obr. 3 Pohyb figurky po číselné ose

Označme $p_m = P(\text{figurka stojící v bodě } m \text{ se dostane do bodu } k)$, $m = 0, 1, \dots, k$. Z obr. 3 vyplývá rovnost

$$p_m = (1 - p) \cdot p_{m-1} + p \cdot p_{m+1} \tag{5}$$

s okrajovými podmínkami $p_0 = 0$ a $p_k = 1$. Vztah (5) je *lineární diferenční rovnice 2. řádu.*

Čtenář seznámený s teorií diferenčních rovnic může nalézt řešení $p_m$ právě tímto způsobem. Zde si ukážeme jinou možnost, jak rovnici (5) vyřešit. Postupnými úpravami odvodíme vztahy

$$\underbrace{\Big((p + (1 - p)\Big)}_{=1} \cdot p_m = (1 - p) \cdot p_{m-1} + p \cdot p_{m+1},$$

$$\frac{p_{m+1} - p_m}{p_m - p_{m-1}} = \frac{1 - p}{p}.$$

Položme $b_m = p_m - p_{m-1}$, pak $\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{1-p}{p}$, což znamená, že $(b_m)_{m=1}^{k}$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q = \frac{1-p}{p}$. Tedy platí:

$$\begin{cases} b_1 = p_1 - p_0 \\ b_2 = p_2 - p_1 = b_1 \cdot q \\ \dots \\ b_m = p_m - p_{m-1} = b_1 \cdot q^{m-1} \\ \dots \\ b_k = p_k - p_{k-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \end{cases} \tag{6}$$

Po sečtení všech řádků soustavy (6) dostaneme

$$p_k - p_0 = b_1 \cdot (1 + q + \ldots + q^{k-1}),$$

což po dosazení

$$p_0 = 0, \quad p_k = 1, \quad 1 + q + \ldots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

a úpravě dává rovnost

$$b_1 = \frac{1 - q}{1 - q^m} = p_1.$$

Z druhého řádku soustavy (6) plyne

$$p_2 = b_2 + p_1 = b_1 \cdot q + p_1 = \frac{1 - q}{1 - q^k} \cdot q + \frac{1 - q}{1 - q^k} = \frac{1 - q^2}{1 - q^k}.$$

Stejným způsobem odvodíme obecný vztah

$$p_m = \frac{1 - q^m}{1 - q^k}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

kde $q = \frac{1-p}{p}$.

Hodnoty $p_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots, k$ představují pravděpodobnosti, že ve hře zvítězí hráč, má-li právě $m$ Kč. Lze dokázat, že hra skončí s pravděpodobností 1 po konečném počtu partií.

Pro lepší představu, jak se mění šance hráče na celkovou výhru, uvedeme dvě tabulky vypočítané pomocí vzorce (7) pro konkrétní $m$, $k$ a $p$.

| $k = 100$ | $p = 0,474$ | $p = 0,45$ |
|---|---|---|
| $m = 75$ | 0,074 | 0,007 |
| $m = 90$ | 0,353 | 0,134 |
| $m = 95$ | 0,595 | 0,367 |
| $m = 99$ | 0,901 | 0,818 |

a) Celkový kapitál $k = 100$ Kč

| $k = 10\,000$ | $p = 0,474$ | $p = 0,45$ |
|---|---|---|
| $m = 9\,950$ | 0,006 | 0,000 |
| $m = 9\,975$ | 0,074 | 0,007 |
| $m = 9\,990$ | 0,353 | 0,134 |
| $m = 9\,995$ | 0,595 | 0,367 |

b) Celkový kapitál $k = 10\,000$ Kč

Tab. 2

Například z posledního políčka tab. 2a) vidíme, že hráč s pravděpodobností 0,818 vyhraje 1 Kč (hra skončí ve stavu $k = 100$) a s pravděpodobností 0,182 hra skončí ve stavu $k = 0$, tj. hráč prohraje 99 Kč. Podobně z posledního políčka tab. 2b) vidíme, že hráč s pravděpodobností 0,367 vyhraje 5 Kč, zatímco s pravděpodobností 0,633 prohraje 9,995 Kč. Vidíme tedy, že jen velmi „malé odchýlení“ od spravedlivé hry nedává hráči reálnou šanci na výhru. Uvědomíme-li si tyto skutečnosti, je pro nás hraní některých her (viz tab. 1) zcela nepřijatelné.

S problematikou „ruinování hráče“ se setkáváme i v běžném životě, aniž si to možná uvědomujeme. Počítání v některých sportech je rozděleno na „nezávislé“ díly – sety. Některé sportovní soutěže bývají zakončeny závěrečným play off hraném na 2, 3 nebo 4 vítězné zápasy. V obou případech je jedním z důvodů snaha eliminovat nahodilé výsledky. Přijmeme zjednodušující předpoklad,[2)] že jeden ze soupeřů vyhrává každé utkání s pravděpodobností $p$ a výsledky jednotlivých utkání jsou navzájem nezávislé. Nyní snadno odvodíme, že pravděpodobnost jeho vítězství v celé sérii je dána vztahem:

$$p^2 + 2p^2(1-p) \qquad \text{na 2 vítězství}$$

$$p^3 + 3p^3(1-p) + 6p^3(1-p)^2 \qquad \text{na 3 vítězství}$$

$$p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + 20p^4(1-p)^3 \qquad \text{na 4 vítězství}$$

Po dosazení konkrétních hodnot do uvedených vztahů dostaneme tabulku

| hraje se na | $p = 0,45$ | $p = 0,4$ | $p = 0,35$ | $p = 0,3$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 vítězství | 0,425 | 0,352 | 0,282 | 0,216 |
| 3 vítězství | 0,407 | 0,317 | 0,235 | 0,163 |
| 4 vítězství | 0,392 | 0,290 | 0,200 | 0,126 |

Tab. 3 Pravděpodobnost vítězství v sérii v závislosti na $p$ a délce série

Z tab. 3 např. vidíme, že hraje-li se série na 4 vítězná utkání, má slabý tým ($p = 0,3$) pouze poloviční šanci, že v sérii zvítězí, oproti sérii hrané na 2 vítězná utkání.

2) Podobně lze vytvořit i realističtější modely připouštějící „závislost“ mezi sety, odlišující utkání hraná doma a venku atd.