O vázaných extrémech funkcí

DAG HRUBÝ

Jevíčko

S pojmem *vázaný extrém* je spjata úloha, v níž hledáme extrémy funkce (zpravidla více proměnných), a to při platnosti omezujících podmínek pro její proměnné. Mezi často používané prostředky při vyšetřování vázaných extrémů funkce patří metoda Lagrangeových multiplikátorů. Její použití však vyžaduje hlubší znalosti z vyšší matematiky.

Cílem tohoto příspěvku je ukázat, jak lze určit vázané extrémy některých výrazů (funkcí) elementárním způsobem, využitelným i na středních školách.

Úloha 1

Určete maximální hodnotu výrazu $x + y$, pokud platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení. Předně si uvědomme, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \tag{1}$$

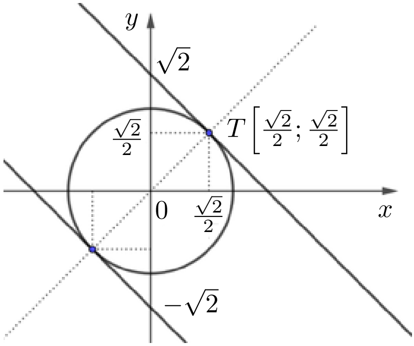
kde rovnost nastane pouze v případě, když $x = y$ a současně platí $x \geq 0$, $y \geq 0$. Po dosazení do (1) za $x^2 + y^2 = 1$ ihned dostaneme

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odkud plyne $x+y \leq \sqrt{2}$, přičemž rovnost nastane, právě když $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Maximální hodnota výrazu $x + y$ je tedy $\sqrt{2}$.

Druhé řešení (užitím analytické geometrie). Uvažujme systém rovnoběžek $x + y = k$, kde k je reálný parametr, a kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Hledáme takový bod o souřadnicích (x, y), který leží na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a současně na některé z přímek parametrického systému $y = -x + k$ tak, aby reálná hodnota k byla maximální. Těmto podmínkám vyhovuje přímka $y = -x + k$ s největším možným k, která je tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Tato tečna a osy souřadnic x, y vymezují v I. kvadrantu rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je bod dotyku tečny $T[x_0, y_0]$ středem jeho přepony. Odpovídající normála vedená bodem $T[x_0, y_0]$ má rovnici

$y = x$. To znamená, že pro souřadnice bodu T platí $x_0 = y_0$. Po dosazení do rovnice $x^2 + y^2 = 1$ snadno určíme, že je $x_0 = y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $k = \sqrt{2}$. Grafické vyjádření této situace je na obr. 1.



Obr. 1

Vedle tečny $y = -x + \sqrt{2}$ je zde zobrazena také tečna $y = -x - \sqrt{2}$, která určuje minimální hodnotu výrazu $x + y$, kterou je $-\sqrt{2}$.

Třetí řešení (užitím diskriminantu kvadratické rovnice, viz [1] nebo [2]). Označíme-li $z = x+y$, pak $y^2 = (z-x)^2$. Do tohoto vztahu dosadíme za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z: $2x^2 - 2xz + z^2 - 1 = 0$.

Protože x je reálné číslo, musí být diskriminant D této kvadratické rovnice nezáporný, tj. $D = 8 - 4z^2 \geq 0$. Odtud plyne $|z| \leq \sqrt{2}$, tedy $z \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$. Pro minimální hodnotu z platí $z = x + y = -\sqrt{2}$, pro maximální pak $z = x + y = \sqrt{2}$.

V další části se budeme zabývat zobecněním předcházející úlohy a jejími variantami.

Úloha 2

Určete maximální a minimální hodnotu výrazu $ax + by$ v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

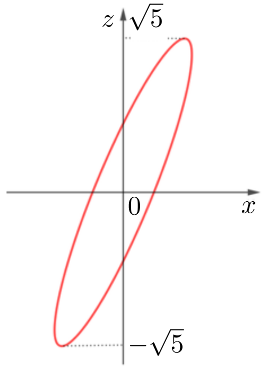
Řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = ax + by$, pak $y = (z - ax)/b$ a tedy $y^2 = (z - ax)^2/b^2$. Dosazením za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$ pak dostaneme

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2azx + z^2 - b^2 = 0. \qquad (2)$$

Tato rovnice představuje kvadratickou rovnici s parametry a, b, z. Pro její diskriminant platí

$$D = 4a^2z^2 - 4(a^2+b^2)z^2 + 4(a^2+b^2)b^2 = 4(a^2+b^2)b^2 - 4b^2z^2.$$

Z podmínky $D \geq 0$ dostáváme $z^2 \leq a^2+b^2$. Odtud plyne $|z| \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Minimální hodnota je tedy $z = -\sqrt{a^2+b^2}$ a maximální pak $z = \sqrt{a^2+b^2}$. Pokud bychom zvolili např. $a = 2, b = 1$, dostali bychom po dosazení do (2) rovnici $5x^2 - 4zx + z^2 - 1 = 0$, což je v soustavě souřadnic Oxz rovnice elipsy. Obr. 2 můžeme chápat jako grafické řešení dané úlohy. Vedle minimální hodnoty $-\sqrt{5}$ je zde také hodnota maximální $\sqrt{5}$. Úloha 1 je tak speciálním případem úlohy 2, kde $a = 1$, $b = 1$.



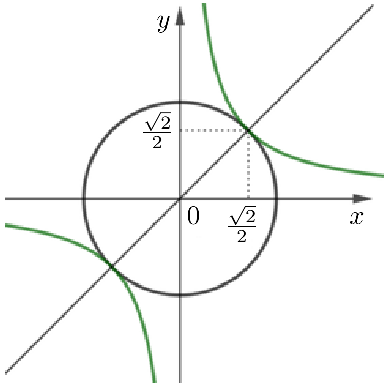
Obr. 2

Úloha 3

Pro $x, y \in \mathbb{R}$ určete maximální hodnotu výrazu xy v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení (užitím analytické geometrie). Uvažujme systém hyperbol $xy = k$ a kružnici $x^2+y^2 = 1$. Hledáme takový bod o souřadnicích (x, y), který leží na kružnici $x^2+y^2 = 1$ a současně na některé z hyperbol $xy = k$, tak aby hodnota k byla maximální. Této podmínce vyhovuje hyperbola $xy = k$, která se dotýká kružnice $x^2+y^2 = 1$, viz obr. 3. Tato hyperbola neprotíná osy souřadnic a tedy je $x \neq 0$, $y \neq 0$. Osy této rovnoosé hyperboly jsou přímky $y = x$ a $y = -x$. To znamená, že pro souřadnice x_0, y_0 bodu dotyku platí $x_0 = y_0$. Z rovnice kružnice $x^2+y^2 = 1$ snadno zjistíme, že platí $x_0 = y_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro maximální hodnotu k pak v obou případech platí $k = x_0y_0 = x_0^2 = \frac{1}{2}$.

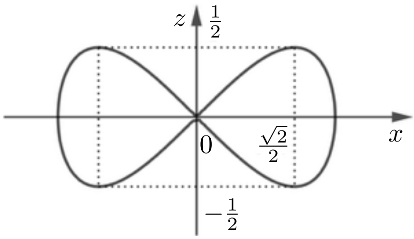
Podobně můžeme postupovat při stanovení minimální hodnoty výrazu $xy = k$. V tomto případě $y = -x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, a platí $k = -\frac{1}{2}$.



Obr. 3

Druhé řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = xy$, pak $y^2 = \frac{z^2}{x^2}$ $(x \neq 0)$. Po dosazení do této rovnice za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$, dostaneme $x^4 - x^2 + z^2 = 0$. Dostáváme bikvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z, kterou po substituci $x^2 = t$ převedeme na kvadratickou rovnici $t^2 - t + z^2 = 0$. Protože t je reálné číslo, musí být diskriminant této kvadratické rovnice nezáporný, $D = 1 - 4z^2 \geq 0$, $|z| \leq \frac{1}{2}$. Největší hodnota zkoumaného výrazu $z = xy$ je tedy $z = \frac{1}{2}$ a jeho nejmenší hodnota je $z = -\frac{1}{2}$.

Podobně jako v předcházejících úlohách si ukážeme grafické řešení této úlohy. Rovnice $x^4 - x^2 + z^2 = 0$ je v soustavě souřadnic Oxz rovnicí *Geronovy lemniskáty.*[1] Obr. 4 můžeme chápat také jako grafické řešení dané úlohy. Kromě minimální hodnoty $-\frac{1}{2}$ je z obr. 4 patrná také maximální hodnota z, a to $\frac{1}{2}$.



Obr. 4

[1] Camille-Christophe Gerono (1799–1891), francouzský matematik.

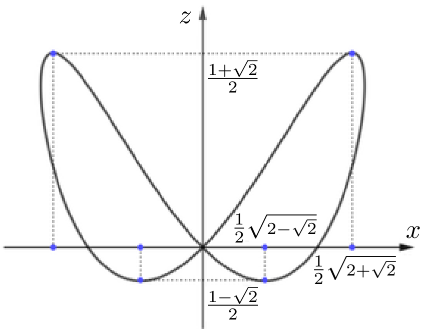
Úloha 4

Určete minimální a maximální hodnotu výrazu $x^2 + xy$ v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = x^2 + xy$, pak pro $x \neq 0$ dostaneme $y^2 = (z - x^2)^2/x^2$. Po dosazení do tohoto vztahu za y^2 ze vztahu $x^2 + y^2 = 1$ obdržíme rovnici

$$2x^4 - (2z + 1)x^2 + z^2 = 0. \tag{3}$$

Dostáváme bikvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z, kterou substitucí $x^2 = t$ převedeme na rovnici $2t^2 - (2z + 1)t + z^2 = 0$. Protože t je reálné číslo, musí být diskriminant této kvadratické rovnice nezáporný, $D = -4z^2 + 4z + 1 \geq 0$, $|2z - 1| \leq \sqrt{2}$. To znamená, že je $z \in \langle \frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2} \rangle$. Minimální hodnota je tedy $z = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Rovnice (3) odpovídá v kartézské soustavě souřadnic Oxz křivce na obr. 5.



Obr. 5

Ve 28. ročníku mezinárodní soutěže *Matematický duel*, která se konala v listopadu 2024, byla v kategorii B, určené žákům 1. a 2. ročníku gymnázia, zadána následující úloha: *Nechť x, y jsou libovolná reálná čísla, pro která platí $2x - y = 5$. Určete všechny dvojice reálných čísel (x, y), pro které nabývá výraz $x^2 + y^2$ nejmenší hodnotu.* Pokuste se úlohu vyřešit.

Literatura

[1] *Hrubý, D., Švrček, J.:* Využití diskriminantu kvadratické rovnice. Matematika–fyzika–informatika, roč. 26 (2017), č. 5, s. 321–327.

[2] *Hrubý, D.:* Metoda diskriminantu. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, roč. 53 (2024), č. 1.