Výpočty a obrázky

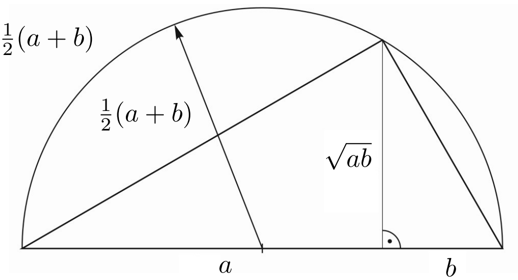
FRANTIŠEK KUŘINA – JANA CACHOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V libovolné učebnici matematiky můžeme pozorovat tři způsoby vyjadřování. Slovní text v běžném jazyku. Je obvykle formulován ve větách v souladu s obvyklými gramatickými pravidly. Dále je v učebnicích symbolický jazyk vzorců a obrázky.

Uveďme příklad. Geometrický průměr je nejvýše tak velký jako průměr aritmetický (obr. 1).

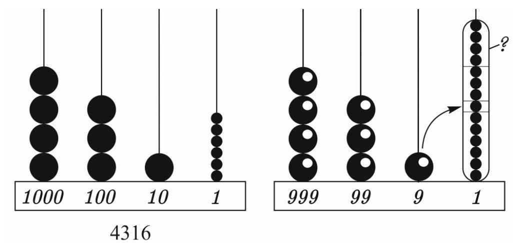
$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$



Obr. 1

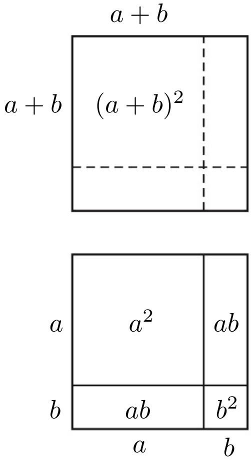
Obrázky jsou důležité jak při výkladu učiva, tak i při řešení úloh. Tak např. obr. 2 je ilustrací pravidla pro dělitelnost čísla čísly tři nebo devět.

Vymodelujeme-li číslo na řádovém počítadle, můžeme si představit, že od každé jednotky vyššího řádu odečteme číslo jedna (to je na obr. 2 znázorněno kolečkem s tečkou) a takto vzniklé jednotky přidáme na drát jednotek. Celkový jejich počet je roven cifernému součtu čísla, tj. počtu tisíců, set, desítek a jednotek. A tento součet rozhoduje o dělitelnosti čísla devíti.



Obr. 2

Obr. 3 ilustruje větu o druhé mocnině dvojčlenu, na obr. 4 vidíme násobení mnohočlenů.



Obr. 3

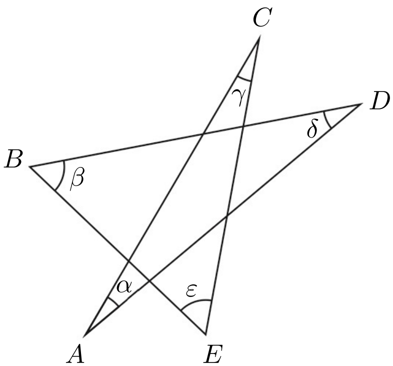
	d	e
a	ad	ae
b	bd	be
c	cd	ce

Obr. 4

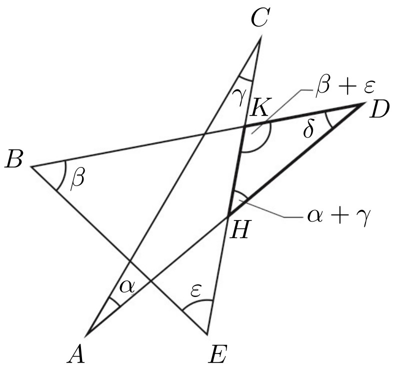
Obrázky při výpočtech

Příklad 1

Vypočítejte součet velikostí úhlů α, β, γ, δ, ε ve vrcholech pěticípé hvězdy na obr. 5.



Obr. 5

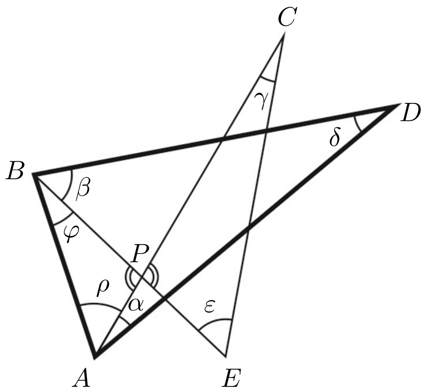


Obr. 6

Z řady různých možností *řešení* uvedeme dvě.

Nejjednodušší je patrně postup podle obr. 6. Úhel HKD je vnější úhel trojúhelníku KBE, má tedy velikost $\beta+\varepsilon$. Podobně úhel KHD je vnějším úhlem trojúhelníku CHA a má tedy velikost $\alpha+\gamma$. Součet $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$ je $180°$.

Jiné *řešení* úlohy vychází z trojúhelníku BAD (obr. 7).



Obr. 7

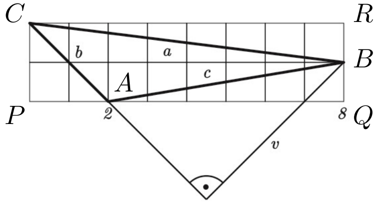
Protože $\varphi+\rho=\gamma+\varepsilon$, je $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=180°$.

Příklad 2

Máme vypočítat obsah S trojúhelníku ABC ($A[2;0]$, $B[8;1]$, $C[0;2]$).

Umístíme trojúhelník ABC do čtvercové sítě (obr. 8). Z tohoto obrázku můžeme poznat několik řešení úlohy.

Pomocí Pythagorovy věty je možné určit délky a, b, c daného trojúhelníku a obsah S pak vypočítáme pomocí Heronova vzorce.



Obr. 8

Metodami analytické geometrie můžeme vypočítat délku strany b a vzdálenost vrcholu B od přímky CA. S pak vypočítáme podle vzorce

$$S = \frac{1}{2}bv.$$

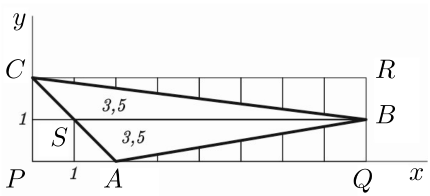
Vypočítáme-li velikost úhlu γ, dostáváme výsledek ve tvaru

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Obsah S můžeme určit i pomocí vektorového součinu známého z učebnice analytické geometrie [2].

Naši ukázku můžeme řešit na úrovni základní školy. Podle obr. 9 vidíme, že platí

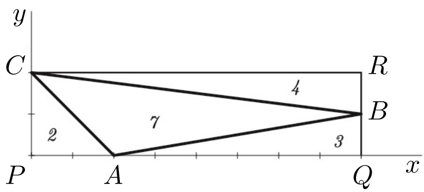
$$S = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 1 = 7.$$



Obr. 9

„Opíšeme-li“ trojúhelníku ABC obdélník $PQRC$, vidíme, že platí (obr. 10)

$$S = 2\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1 = 7.$$



Obr. 10

V učebnici [2] je odvozen vzorec pro obsah trojúhelníku s vrcholy $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$:

$$S = \frac{1}{2}\cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Užitím tohoto vzorce můžeme obsah vypočítat, aniž bychom kreslili obrázek. Ten za nás nakreslili autoři v uvedené učebnici.

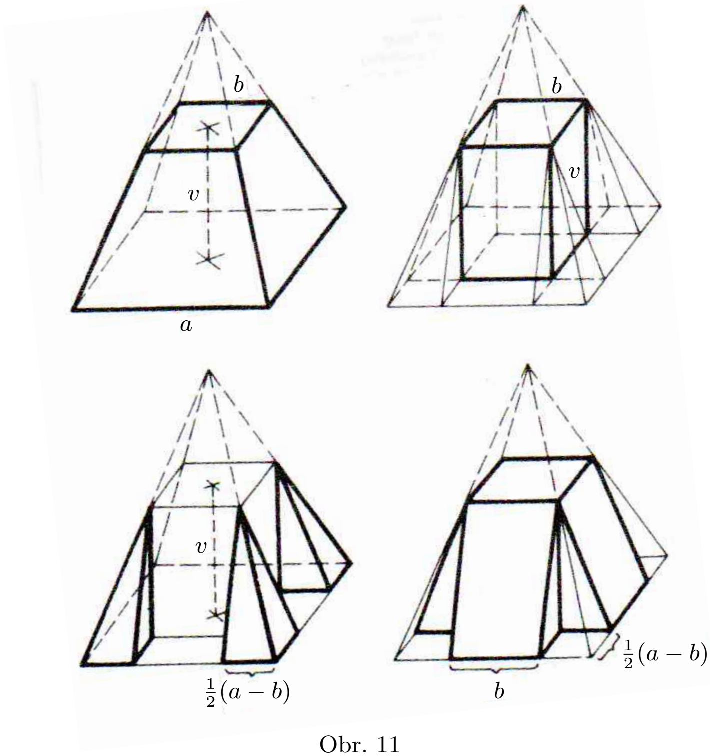
Příklad 3

Máme vypočítat objem komolého jehlanu se čtvercovými podstavami o stranách a, b a výšce v. Nemáme přitom použít větu o objemu komolého jehlanu, kterou odvozuje Pomykalová v publikaci [1].

Studuje-li žák toto odvození, patrně se zarazí na „samozřejmé“ rovnosti

$$S_1 + S_2 = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right).$$

Tím spíše nemohli uvažované odvození provést stavitelé pyramid. Ti si ovšem pomohli důmyslným způsobem. Rozdělili komolý jehlan na 9 těles, jejichž objemy uměli vypočítat (obr. 11). Tento výpočet nebudeme provádět.

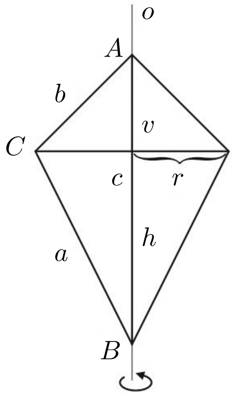


Obr. 11

Příklad 4

Máme vypočítat objem tělesa, které vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a, b kolem přepony c.

Z obr. 12 vidíme, že se jedná o dva kužele se společnou kruhovou podstavou o poloměru r a výškami h a v.



Obr. 12

Pro objem V tedy platí

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 (v + h).$$

Protože $ab = rc$ (obsah trojúhelníku ABC) je

$$r = \frac{ab}{c}$$

a podle obrázku je $v + h = c$, máme pro objem V výsledek

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{1}{3}\pi \frac{(ab)^2}{c}.$$

Podle našeho názoru jsou obrázky důležitou složkou řešení úloh. Bez nich bychom sotva nějakou úlohu vyřešili.

Literatura

[1] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Stereometrie. Prometheus, Praha, 1995.

[2] *Stehlíková, N., Hejný, M., Jirotková, D.*: Úvod do analytické geometrie. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2005.