O jednom probléme z teórie čísel

MARTIN MELICHER – MICHAL JANÍK

posluchači Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha

V júnovom čísle časopisu MFI z roku 2022 bol v rubrike *Zajímavé matematické úlohy* uvedený problém, ktorý navrhol *Jaromír Šimša* z PřF MU v Brne (viď MFI roč. 31/2, str. 115, úloha č. 277). Tento problém zostal pre čitateľov dva roky otvorený. Zadanie tejto úlohy tu zapíšeme takto:

Nech D a n sú prirodzené čísla, pre ktore platí $D \le \frac{n(n+1)}{2}$. Rozhodnite, či potom z každej n-prvkovej množiny po sebe idúcich celých čísel možno vybrať takú neprázdnu podmnožinu, aby súčet jej prvkov bol deliteľný číslom D.

V tomto článku túto úlohu vyriešime s výsledkom, že *odpoveď je kladná* pre všetky popísané dvojice čísel D a n. Aby bol náš postup prehľadnejší, uvedieme najprv jedno zaujímavé a užitočné tvrdenie z teórie čísel. Pri jeho dôkaze aj my využijeme pôvodný autorov užitočný obrat, ktorý je práve vďaka tomu dobre známy pod názvom *Dirichletov princíp.* (Jeho ďalšie početné uplatnenia v teórii čísel, geometrii a kombinatorike možno nájsť v rovnomennom zväzku č. 25 z edície Škola mladých matematiků).

Dirichletova aproximačná veta

Pre ľubovoľné reálne číslo x a ľubovoľné prirodzené číslo N existujú také celé čísla r a s, kde $1 \le s \le N$, že platí

$$|sx - r| \le \frac{1}{N+1}, \quad \textit{resp.} \quad \left|x - \frac{r}{s}\right| \le \frac{1}{s(N+1)}.$$

Dôkaz. Uvažujme N čísel $kx - \lfloor kx \rfloor$ pre $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, ktoré všetky ležia v intervale $\langle 0, 1)$. Rozlíšime 3 prípady:

- ▷ Pre nejaké $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ platí $kx - \lfloor kx \rfloor \in \langle 0, \frac{1}{N+1})$. Potom pre $r = \lfloor kx \rfloor$, $s = k$ máme $0 \le sx - r \le \frac{1}{N+1}$.

- ▷ Pre nejaké $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ platí $kx - \lfloor kx \rfloor \in \langle \frac{N}{N+1}, 1)$. Potom pre $r = 1 + \lfloor kx \rfloor$, $s = k$ máme $-\frac{1}{N+1} \leq sx - r \leq 0$.
- ▷ Pre každé $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ platí $kx - \lfloor kx \rfloor \in \langle \frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1})$. V tomto prípade rozdeľme interval $\langle \frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1})$ na $N - 1$ intervalov

$$\left\langle \frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1} \right), \left\langle \frac{2}{N+1}, \frac{3}{N+1} \right), \ldots, \left\langle \frac{N-1}{N+1}, \frac{N}{N+1} \right).$$

Keďže našich čísel je N a intervalov iba $N - 1$, podľa Dirichletovho princípu musia niektoré dve z týchto čísel ležať v rovnakom intervale. Nájdeme teda čísla $k_1, k_2 \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $k_1 > k_2$, také, že čísla $a_1 = k_1 x - \lfloor k_1 x \rfloor$ a $a_2 = k_2 x - \lfloor k_2 x \rfloor$ ležia v rovnakom intervale dĺžky $\frac{1}{N+1}$. Potom

$$|a_1 - a_2| \leq \frac{1}{N+1},$$

a teda môžeme položiť $r = \lfloor k_1 x \rfloor - \lfloor k_2 x \rfloor$, $s = k_1 - k_2$.

Riešenie Šimšovho problému

Nech teda n, D sú prirodzené čísla a platí $D \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Dokážeme, že z každej n-prvkovej množiny za sebou idúcich celých čísel možno vybrať neprázdnu podmnožinu so súčtom prvkov deliteľným D. V priebehu dôkazu budeme uvádzať rôzne obmedzenia na veľkosť čísla n; vrátime sa k nim v úplnom závere.

Majme $a \in \mathbb{Z}$ a uvažujme množinu $M = \{a, a + 1, \ldots, a + n - 1\}$. Nech $r \in \mathbb{Z}$ a $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pozrime sa, kedy je možné vyjadriť rD ako súčet s rôznych prvkov M. Najmenší možný súčet prvkov s-prvkovej podmnožiny M je

$$A = a + (a + 1) + \ldots + (a + s - 1) = \frac{(2a + s - 1)s}{2},$$

najväčší zas

$$B = (a + n - s) + \ldots + (a + n - 1) = \frac{(2a + 2n - s - 1)s}{2}.$$

Navyše, ak N je s-prvková podmnožina M so súčtom prvkov $S < B$, tak vždy nájdeme $k \in M \setminus \{a + n - 1\}$ také, že $k \in N$ a $k + 1 \notin N$, potom $N \setminus \{k\} \cup \{k + 1\}$ je s-prvková podmnožina M so súčtom prvkov $S + 1$.

Z toho vyplýva, že súčty prvkov s-prvkových podmnožín M sú práve všetky celé čísla od A do B. Číslo rD sa teda dá takýmto súčtom vyjadriť práve vtedy, keď

$$\frac{(2a+s-1)s}{2} \le rD \le \frac{(2a+2n-s-1)s}{2}.$$

Ekvivalentnými úpravami môžeme túto podmienku previesť na

$$\frac{s-n}{2D} \le \frac{r}{s} - \frac{2a+n-1}{2D} \le \frac{n-s}{2D},$$

čo sa dá prepísať ako

$$\left|\frac{2a+n-1}{2D} - \frac{r}{s}\right| \le \frac{n-s}{2D}. \tag{1}$$

Máme dokázať, že pre každé $a \in \mathbb{Z}$ existujú $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že (1) platí.

Začneme zopár jednoduchými pozorovaniami:

1. Ak (r, s) spĺňa (1) pre a, tak pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí, že $(r + ks, s)$ spĺňa (1) pre $a + kD$. Stačí nám teda uvažovať $a \in \{1, \dots, D\}$.
2. Ak $D - n + 1 \le a \le D$, tak $(r, s) = (1, 1)$ spĺňa (1). Pre ďalší rozbor teda ostáva $a \in \{1, \dots, D - n\}$.
3. Ak (r, s) spĺňa (1) pre a, tak $(s - r, s)$ spĺňa (1) pre $D - n + 1 - a$. Ďalej teda stačí uvažovať $a \in \langle 1, \frac{D-n+1}{2}\rangle \cap \mathbb{N}$, kedy $\frac{2a+n-1}{2} \le \frac{1}{2}$.
4. Pre $a = 1$, $D = \frac{n(n+1)}{2}$ máme $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{1}{n}$, môžeme teda položiť $r = 1$, $s = n$.

   Pre $a = 1$, $D = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ máme $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{n+1}{n^2+n-2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2D}$, môžeme teda položiť $r = 1, s = n - 1$.

   Vo všetkých ostatných prípadoch máme $\frac{2a+n-1}{2D} \ge \frac{n+1}{n^2+n-4}$, pretože platí:

   ▷ Ak $a = 1$, tak $D \le \frac{n(n+1)}{2} - 2$, čiže $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{n+1}{2D} \ge \frac{n+1}{n^2+n-4}$.

   ▷ Ak $a \ge 2$, tak $\frac{2a+n-1}{2D} \ge \frac{n+3}{2D} \ge \frac{n+3}{n(n+1)} \ge \frac{n+1}{n^2+n-4}$.
   (Posledná nerovnosť platí pre $n \ge 3$.)

   Stačí teda uvažovať také $a \in \mathbb{Z}$, pre ktoré $\frac{2a+n-1}{2D} \in \left\langle \frac{n+1}{n^2+n-4}, \frac{1}{2} \right\rangle$. (Taký interval má zmysel, ak $n \ge 3$.)

Po predchádzajúcich pozorovaniach vidíme, že nám pre všetky celé čísla $n \geq 3$ stačí dokázať nasledujúce tvrdenie:

Pre každé reálne $x \in \left\langle \frac{n+1}{n^2+n-4}, \frac{1}{2} \right\rangle$ *existujú* $r \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, \ldots, n\}$ *také, že*

$$\left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{n-s}{n(n+1)}.$$

K dôkazu si povšimnime, že číslo $x = \frac{1}{n-1}$ v danom intervale leží (ak $n \geq 3$). Ak $\frac{n+1}{n^2+n-4} \leq x \leq \frac{1}{n-1}$, zvolíme $r = 1$, $s = n-1$. Potom

$$\left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{n-1} - \frac{n+1}{n^2+n-4} = \frac{(n^2+n-4)-(n+1)(n-1)}{(n-1)(n^2+n-4)} =$$
$$= \frac{n-3}{n^3-5n+4} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{(pre každé } n\text{)}.$$

Ďalej nech $x \in \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right\rangle$. Podľa Dirichletovej aproximačnej vety pre $N = n-2$ nájdeme $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \{1, \ldots, n-2\}$ také, že $\left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{s(n-1)}$. Z obmedzenia pre x vyplýva, že $s \neq 1$, a teda $2 \leq s \leq n$. Potom pre také s stačí overiť $\frac{1}{s(n-1)} \leq \frac{n-s}{n(n+1)}$, čo sa ekvivalentnými úpravami prevedie na

$$(n-1)s^2 + (n-n^2)s + (n^2+n) \leq 0.$$

Ak výraz na ľavej strane nerovnosti označíme $P(s)$, tak P je kvadratická funkcia s kladným koeficientom pri s^2, stačí teda overiť len dve nerovnosti, $P(2) \leq 0$ a $P(n-2) \leq 0$:

- ▷ $P(2) = 4(n-1) + 2(n-n^2) + (n^2+n) = n(7-n) - 4 \leq 0$ pre $n \geq 7$.
- ▷ $P(n-2) = (n-1)(n-2)^2 + (n-n^2)(n-2) + (n^2+n) = n(7-n) - 4 \leq 0$ pre $n \geq 7$.

Aj keď sa nám tvrdenie s aproximáciou čísla x podarilo dokázať iba pre celé čísla $n \geq 7$, tvrdenie z pôvodného problému platí aj pre $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, čo možno overiť manuálne. Dodajme ešte, že tvrdenie s aproximáciou čísla x platí aj pre $n \in \{3, 5, 6\}$, neplatí však pre $n = 4$ – to možno overiť manuálne spočítaním zjednotenia všetkých intervalov $\left\langle \frac{r}{s} - \frac{n-s}{n(n+1)}, \frac{r}{s} + \frac{n-s}{n(n+1)} \right\rangle$ pre $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.