

Reálný model obecného řešení frekvence kmitů elektrostatičkého kyvadla

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Věnováno doc. Oldřichu Lepilovi k jeho 90. narozeninám.

Elektrostatičké kyvadlo podobně jako Van de Graaffův generátor (VdGG) je pro učitele fyziky základním demonstračním nástrojem při výkladu elektrostatičkých jevů. Většinou je použito pro demonstraci práce, kterou vykoná elektrické pole deskového kondenzátoru při přenosu nabitěho míčku na stolní tenis. Jednoduchou změnou vzdálenosti desek kondenzátoru můžeme také ukázat změnu frekvence kmitů, která s rostoucí vzdáleností klesá. Disponuje-li experimentátor zdrojem vysokého napětí o různých hodnotách, může prokázat i zvyšování frekvence kmitů s rostoucími napětími mezi deskami kondenzátoru.

V úvodu práce stručně zmíníme různé teorie dynamiky elektrostatičkého kyvadla zahrnující buď pouze vliv elektrického pole, nebo i tíhové síly, případně další vlivy [1–7]. Detailní přehled vztahů pro výpočet frekvence kmitů jednotlivých teorií je uveden v Apendixu A.

Teorie pohybu elektrostatičkého kyvadla není pouhým zajímavým středoškolským rozšířením učiva, ale v určitých speciálních případech má přesah i do oblastí termodynamiky [5], nanotechnologií [8], nebo problematiky jevu ESD (electrostatic discharge) [9].

Obdobou elektrostatičkého kyvadla jsou tzv. Franklinovy zvony, které patří mezi školní pomůcky zpestřující svojí hudbou tradiční experimenty. Protože při tomto experimentu dochází také k přenosu náboje mezi kládkem a zvonky, lze teorii vysvětlující procesy probíhající při tomto experimentu přiměřeně aplikovat i na klasické elektrostatičké kyvadlo. Někteří autoři dokonce tento experiment využívají v rámci pregraduálního studia jako zajímavé laboratorní cvičení [10], další vzali v úvahu i termodynamické aspekty statistické fyziky při řešení pohybové rovnice kyvadla rozeznávajícího zvonky [11]. Zmíňme také teorii pohybu nabitě částice v oscilujícím nehomogenním elektrickém poli, kde je mimo jiné diskutován

i pohyb částice v homogenním poli, ovlivněný oscilační perturbací [12], což je v makroskopickém měřítku případ elektrostatičkého kyvadla.

Pohybem fyzického kyvadla v odporujícím prostředí s lineární závislostí odporové síly na rychlosti se zabývají např. práce [13, 14], které ale neuvažují vliv elektrického pole. Pohybové rovnice lze nicméně rozšířit i o vliv elektrického pole a řešit tyto rovnice analyticky.

V článku nejprve jednotlivé modely vzájemně porovnáme s reálnými výsledky experimentálního měření frekvence kmitů a následně navrheme reálný model kmitů fyzického kyvadla, který přináší obecné řešení zahrnující elektrické i tíhové síly působící na kyvadlo, koeficient restituice i odpor vzduchu. Zdůvodníme, že rychlosti pohybu kyvadla jsou na hranici mezi laminárním a turbulentním prouděním, přičemž lze sestavit pohybovou rovnici fyzického kyvadla v odporujícím prostředí podle Stokesovy rovnice s explicitním řešením a nikoliv podle Newtonova vzorce, kdy pohybovou rovnici nelze řešit analyticky. V druhé části práce se pokusíme vysvětlit hodnotu koeficientu η , který představuje poměrnou část náboje přeneseného při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru, srovnáním časové konstanty vybíjení VdGG s náhradním RC obvodem. Srovnání reálného zapojení VdGG s paralelním RC obvodem bylo prezentováno např. v [15].

Vzájemné elektrostatičké působení mezi dvěma nabitými koulemi, resp. mezi nabitou koulí a nabitou rovinou jsou diskutovány v [16, 17]. Dílčí závěry těchto prací jsou využity i v této práci v závěrečné diskuzi.

Nakonec zmíníme i další vlivy, které působí na pohyb kyvadla a tím i na velikost jeho frekvence v homogenním elektrickém poli deskového kondenzátoru. Jedním z nich je chaotické chování kyvadla v blízkosti nabitě desky, jehož popis byl publikován v [18].

Při vysvětlení teorie popisující pohyb reálného fyzického kyvadla provedeme současně diferenciaci vztahů pro frekvenci kyvadla na jednotlivých úrovních od středoškolské až po vysokoškolský kurz.

Ukážeme také, jak mohou být výsledky této práce aplikovány na středních školách v rámci laboratorních cvičení při měření napětí VdGG jako zdroje vysokého napětí v experimentu s elektrostatičkým kyvadlem. Závěry nicméně platí obecně pro libovolný použitý zdroj vysokého napětí.

1. Teoretické odvození vztahu pro frekvenci kmitů kyvadla

Při odvození rovnice pro frekvenci kmitů kyvadla můžeme vyjít z různých fyzikálních principů, které lze nalézt např. v [1–7] nebo [11–14]. Přehled různých typů kyvadel, která jsou umístěna do homogenního elektric-

kého pole, je přehledně uveden v tabulce A1 Apendixu A. Modely M2 a M9, které jsme navrhli v první fázi zkoumání, jsou okomentovány podrobněji v Apendixu B. U ostatních modelů, jejichž odvození najdeme v příslušných publikacích, uvádíme jen výsledný vztah pro frekvenci kmitů. Modely M1–M5 pracují pouze s elektrickým polem, modely M6–M9 zahrnují i vliv tíhové síly, a jsou uvedeny v tabulce A2 Apendixu A.

V obecné rovině lze konstatovat, že modely, které svým principem vychází z frekvence kmitů matematického kyvadla, lze poměrně snadno vysvětlit na úrovni znalostí gymnaziálního učiva. Ostatní modely, které jsou založeny na teorii fyzického kyvadla, nebo které případně pracují s jiným principem dynamiky kyvadla, patří svou podstatou do vysokoškolského vzdělávání.

Pro odvození obecného řešení frekvence kmitů kyvadla jsme ve svých úvahách vyšli ze dvou modelů, které k řešení pohybové rovnice kyvadla přistupují exaktním způsobem. Konkrétně se jedná o modely M4 a M5, které stručně představíme níže.

Model M4, zahrnující koeficient restituce, je detailně popsán v [4, kap. 3.2]. Koeficient restituce významně ovlivňuje pohyb kyvadla při nepružných srážkách s deskami kondenzátoru a na základě experimentálně ověřených výsledků měření lze konstatovat, že model, který v sobě nezahrnuje tento koeficient, nemůže poskytnout hodnoty frekvence, které korespondují s experimentálními daty na hladině statistické významnosti 5% nejistoty. Model M4 lze využít při výkladu pro studenty magisterského programu.

Stejnou úroveň výkladu poskytuje i model M5 [5]. Lépe srozumitelným způsobem než [4] provádí zavedení koeficientu restituce, a dospívá ke vztahu pro frekvenci, který je uveden v pátém řádku Tabulky A1. Jako první model z výše zmíněných zavádí i bezrozměrný koeficient η , který udává, jaká část náboje je přenesena z desky kondenzátoru na kyvadlo při jejich kontaktu, nicméně dále nijak nerozvádí ani velikost tohoto parametru, ani jeho výpočet. Tento parametr jsme nazvali *koeficient přenosu náboje* a jeho výpočtem jsme se zabývali v Apendixu D.

Významným parametrem ovlivňujícím velikost výsledné hodnoty teoretické frekvence kyvadla je vzdálenost desek kondenzátoru d , resp. redukováná vzdálenost $d' = d - 2r$, která představuje reálnou vzdálenost, kterou může urazit koule kyvadla o poloměru r ve vodorovném směru. Většina modelů kromě modelu M4 nezohledňuje zkrácení vodorovné délky pro pohyb kyvadla, což vede k větším rozdílům mezi teoretickými hodnotami frekvencí pro různé hodnoty d a experimentálně naměřenými údaji. Situ-

aci ilustruje graf na obr. 3, který zobrazuje hodnoty frekvencí vypočítaných na základě vztahů uvedených v Tabulce A1 a v Tabulce A2, v porovnání s experimentálně naměřenými hodnotami. Grafy na obr. 3 a obr. 4 ukazují porovnání stejných experimentálních dat s teoretickou předpovědí hodnot frekvencí námi navrženého modelu M10, který dává obecné řešení zahrnující všechny významné vlivy a poskytuje nejlepší shodu s experimentálně naměřenými hodnotami ze všech modelů M1–M10.

Pohybová rovnice nabitého fyzického kyvadla v homogenním elektrickém a tíhovém poli, jejichž vektory intenzit jsou vzájemně kolmé

Reálné kyvadlo složené z koule o poloměru r a závěsu o délce L lze považovat za fyzické kyvadlo, pro které můžeme vyjádřit výsledný moment působících sil pomocí rovnice

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

kde M je výsledný moment sil vzhledem k ose otáčení procházející ve vzdálenosti L od těžiště tělesa, J je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení, ω , resp. ε je úhlová rychlost, resp. úhlové zrychlení a φ je úhlová výchylka kyvadla z rovnovážné polohy.

Asano ve svém odvození v [22] vyšel z pohybové rovnice, ve které elektrickou sílu qE a tíhovou sílu mg v daném bodě promítnul do směru tečny k trajektorii, kterou je část oblouku kružnice. Pohybovou rovnicí formuloval ve tvaru

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - qEl \cos \varphi,$$

jejíž řešení pro malé výchylky kyvadla, např. $\varphi \leq 10^\circ$ (tj. pro $\sin \varphi \approx \varphi$), lze vyjádřit vztahem (viz [22]):

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t) - \left(\frac{qE}{mg} \right) [1 - \cos(\omega t)] - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

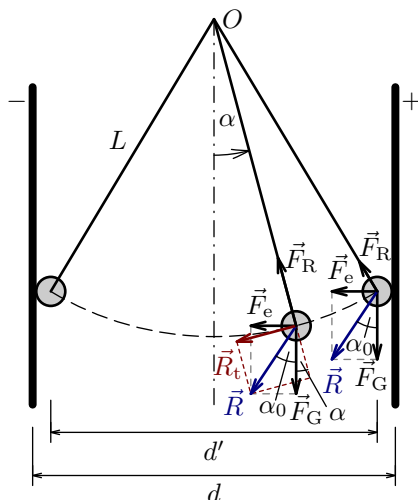
kde ω je úhlová rychlost kyvadla daná rovnicí

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Vztah pro periodu kmitů vyjádřil Asano jako $T = 2t_0$, kde t_0 je doba, za kterou kyvadlo urazí dráhu d mezi elektrodami. Vztah pro t_0 lze vyjádřit

z rovnice (1) dosazením hodnoty φ_0 za φ . Protože se jedná o relativně složitý matematický výraz, odkazujeme pouze na jeho vyjádření v [22, rovnice (9)].

My jsme přistoupili při řešení pohybové rovnice z pohledu výslednice \vec{R} elektrostatické síly $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ a tíhové síly $\vec{F}_G = m\vec{g}$ zobrazené na obr. 1, kterou jsme promítli do směru pohybu kyvadla. Moment síly \vec{F}_R , kterou působí vlákno na kyvadlo, je vzhledem k bodu otáčení nulový a nemá tedy vliv na řešení pohybové rovnice.



Obr. 1 Schématické znázornění sil působících na kyvadlo

Lze-li velikost výslednice sil formulovat pomocí Pythagorovy věty jako

$$R = \sqrt{F_G^2 + F_e^2} = \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2},$$

pak průmět této síly do směru tečny k trajektorii v daném bodě, jak plyne z obr. 1, je dán vztahem

$$R_t = R \sin(\alpha + \alpha_0) = \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} \sin(\alpha + \alpha_0). \quad (3)$$

Pohybovou rovnici lze pak jednoduše formulovat ve tvaru $J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -R_t L$, který můžeme dále zjednodušit zavedením substituce

$$\varphi = \alpha + \alpha_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

a přiblížením $\sin \varphi \approx \varphi$ na tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{L}{J} \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} \varphi = 0. \quad (4)$$

Rovnice (4) je homogenní diferenciální rovnice kmitů harmonického oscilátoru, ve které výraz

$$\omega_0^2 = \frac{L}{J} \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} = \frac{mL}{J} \sqrt{\left[g^2 + \left(\frac{QE}{m} \right)^2 \right]} \quad (5)$$

představuje druhou mocninu úhlové frekvence. Je-li fyzické kyvadlo zkonstruováno z plné koule o poloměru r a tyče o délce L , lze pro moment setrvačnosti J této soustavy vzhledem k vodorovné ose procházející bodem O s pomocí Steinerovy věty odvodit vztah

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2.$$

V případě duté koule, kterou je např. i míček na stolní tenis (PP míček), je vlastní moment setrvačnosti J_0 dán rovnicí (viz [19])

$$J_0 = \frac{2}{5}m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}, \quad (6)$$

kteřou pro velmi malou tloušťku můžeme v limitním případě pro $r_1 - r_2 = \Delta r \rightarrow 0$ vyjádřit výrazem $J_0 = \frac{2}{3}mr^2$. Pro dutou kouli ve spojení s tyčí dostaneme potom výsledný vztah pro moment setrvačnosti vzhledem k vodorovné ose procházející bodem O

$$J = \frac{2}{3}mr^2 + mL^2. \quad (7)$$

Umístíme-li těžiště soustavy koule-tyč při zanedbatelné hmotnosti tyče do středu koule, je rameno výsledné síly rovné délce kyvadla L , a pohybová rovnice má tvar rovnice (4).

Pro vyjádření zrychlení a_e , které míčku udělí elektrická síla, vyjdeme ze vztahu (viz [5])

$$a_e = \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon S \eta}{m}, \quad (8)$$

kde U je napětí mezi deskami kondenzátoru o vzájemné vzdálenosti d a aktivní ploše S , ε je permitivita prostředí, η je koeficient přenosu náboje a m hmotnost koule kyvadla.

Pro frekvenci kmitů byl pak v [5] se započítáním koeficientu restituce k_r odvozen vztah (viz Tabulka A1, model M5), který můžeme přepsat ve tvaru

$$f_{M5} = \sqrt{\frac{\varepsilon S \eta}{8m} \cdot \frac{1 + k_r}{1 - k_r} \cdot \frac{U^2}{d^3}}. \quad (9)$$

Pokud do vztahu (5) implementujeme rovnice (7–9), a vezmeme v úvahu, že pohyb koule ve vodorovném směru se děje po redukované dráze $d' = d - 2r$, jak je správně uvedeno v [4], můžeme rovnici (5) upravit na výsledný vztah pro frekvenci kmitů fyzického kyvadla:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left[\frac{L \varepsilon S \eta}{8md} \left(\frac{1 + k_r}{1 - k_r} \right) \cdot \left(\frac{U}{d'} \right)^2 \right]^2}}. \quad (10)$$

Rovnice (10), reprezentující model M10 popisuje obecné řešení frekvence kmitů reálného fyzického kyvadla v homogenním tíhovém a elektrickém poli, kde platí $\vec{F}_e \perp \vec{F}_g$. Model M10 současně zahrnuje vliv nepružných srážek mezi kyvadlem a deskami kondenzátoru skrze koeficient restituce k_r , koeficient přenosu náboje η vyjadřující poměrnou část náboje přeneseného z desky kondenzátoru na kyvadlo, působení tíhové síly (charakterizované tíhovým zrychlením g) a parametry ovlivňující vlastní frekvenci kyvadla jako je jeho délka L a moment setrvačnosti $J = k_1 m r^2 + mL^2$, kde $k_1 = \frac{2}{3}$, resp. $k_1 = \frac{2}{3}$, pro plnou, resp. dutou kouli.

Učiníme na tomto místě ještě malou vysvětlující poznámku k odvození rovnice (10). Vyjdeme-li ze vztahu pro frekvenci matematického kyvadla $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$, můžeme za předpokladu kolmých sil $\vec{F}_e \perp \vec{F}_g$ uvažovat výsledné zrychlení ve tvaru $a = \sqrt{g^2 + a_e^2}$, kde a_e je zrychlení odpovídající elektrické síle. Vztah pro frekvenci lze potom vyjádřit jako

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \sqrt{g^2 + a_e^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \sqrt{g^2 + (L f_e^2)^2}},$$

kde f_e je frekvence kmitů daná rovnicí (9). Jestliže nakonec výraz $1/L$ pro matematické kyvadlo nahradíme výrazem $L/(k_1 r^2 + L^2)$ pro fyzické kyvadlo, je pak výsledná frekvence kmitů dána vztahem (10).

Pokud bychom uvažovali i odporové síly prostředí vyjádřené Stokesovým vztahem $F_o = 6\pi\mu rv$, kde μ je dynamická viskozita, r poloměr a v rychlost koule, můžeme vztah (10) rozšířit i o vliv odporových sil prostředí. Jejich velikost je nicméně v případě míčku na stolní tenis, jehož maximální rychlost dosahuje v průměru velikosti cca 1 m/s tak malá, že vliv tohoto členu, který má řádově velikost 10^{-3} m/s^2 , na celkovou velikost frekvence je zcela zanedbatelný a ve školních podmínkách navíc neměřitelný.

Vztah (10) přechází pro $U = 0 \text{ V}$ na vztah pro frekvenci fyzického kyvadla daný rovnicí (2). Pokud zanedbáme i rozměry koule ($r = 0 \text{ m}$), vzorec nabude dobře známého tvaru pro frekvenci matematického kyvadla $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$. V případě zanedbání vlivu tíhového pole pro $g \ll a_e$, tj. v limitě $g \rightarrow 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, rovnice (10) přechází na rovnici (9) uvedenou v [5].

Exaktním řešením rovnice (4), společně s počáteční podmínkou $(\frac{d\varphi}{dt})_0 = 0$, je funkce daná následujícím vztahem

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t), \quad (11)$$

což je vyjádření pro okamžitou výchylku harmonického oscilátoru. Srovnání teoretického vyjádření (11) s experimentálně naměřeným průběhem kmitů je provedeno v závěru následující části.

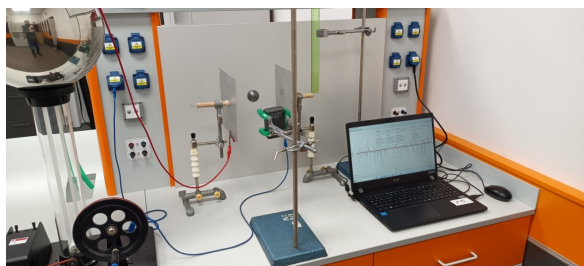
2. Výsledky experimentálního měření frekvence kyvadla v porovnání s teoretickými hodnotami modelů M1–M10

Realizace experimentu je znázorněna na obr. 2. Při realizaci byly použity různé druhy kyvadel o délce v rozmezí 0,4 m až 1 m. První kyvadlo bylo vyrobeno z míčku na stolní tenis o hmotnosti $m = 2,9 \text{ g}$ a poloměru $r = 2 \text{ cm}$, který byl pokryt tenkou vrstvou grafitu. Jako závěs bylo zvoleno nylonové vlákno. Ve druhé variantě se jednalo o PVC míček o hmotnosti $m = 9,6 \text{ g}$ a průměru 64 mm s nástřikem vrstvy Zn-Al, který byl zavěšen na bavlněné niti. Vzdálenost mezi čtvercovými deskami kondenzátoru o délce strany 20 cm byla postupně nastavena na $d = 8 \text{ cm}$, 10 cm, 12 cm, 14 cm, 16 cm, 20 cm a 24 cm.

Protože je pohyb kyvadla relativně rychlý, rozhodli jsme se použít pro měření rychlostí a zrychlení kyvadla video analýzu v programu Tracker, podobným způsobem jakým jsme ji aplikovali na pohyb balónku s řetízkem v [20]. Napětí mezi deskami kondenzátoru bylo generováno pomocí Van de Graaffova generátoru, jehož výstupní hodnota byla experimentálně určena s využitím video analýzy v programu Tracker jako $U = 150(5) \text{ kV}$ (viz [21]). Frekvence kmitů byla měřena bezdrátovým mikrofonom Vernier GO Direct Sound pomocí programu Graphical Analysis.

Koeficient restituce k_r byl u míčku na stolní tenis zvolen v souladu s [4], kde autoři použili stejný míček, jako $k_r = 0,8$. V případě PVC míčku byl metodou dle [4] změřen koeficient restituce o velikosti $k_r = 0,74(2)$.

Hodnota koeficientu η , který udává, jaká část náboje je při kontaktu míčku s deskou kondenzátoru přenesena na míček, byla určena nejprve experimentálně a následně teoreticky odvozena z analogie vybíjení RC obvodu, jak je ukázáno v Apendixu D. V obou případech jsme dospěli k hodnotě $\eta = 0,32(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$, pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček.



Obr. 2 Experimentální design měření frekvence elektrostatického kyvadla

3. Výsledky měření pro míček na stolní tenis a PVC míček

Experimentálně naměřené hodnoty pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček, jsou uvedeny v tabulce 1. Plocha desek kondenzátoru činila v prvním, resp. druhém případě $S = 0,04 \text{ m}^2$, resp. $S = 0,02 \text{ m}^2$. V případě PVC míčku kvůli jeho průměru již nebyla možná realizace se vzdáleností desek kondenzátoru $d = 8 \text{ cm}$. V závěrečné diskuzi se pak zabýváme i vlivem průměru míčku na volbu minimální vzdálenosti desek.

Tabulka 1 Experimentálně naměřené hodnoty frekvence kmitů fyzického kyvadla

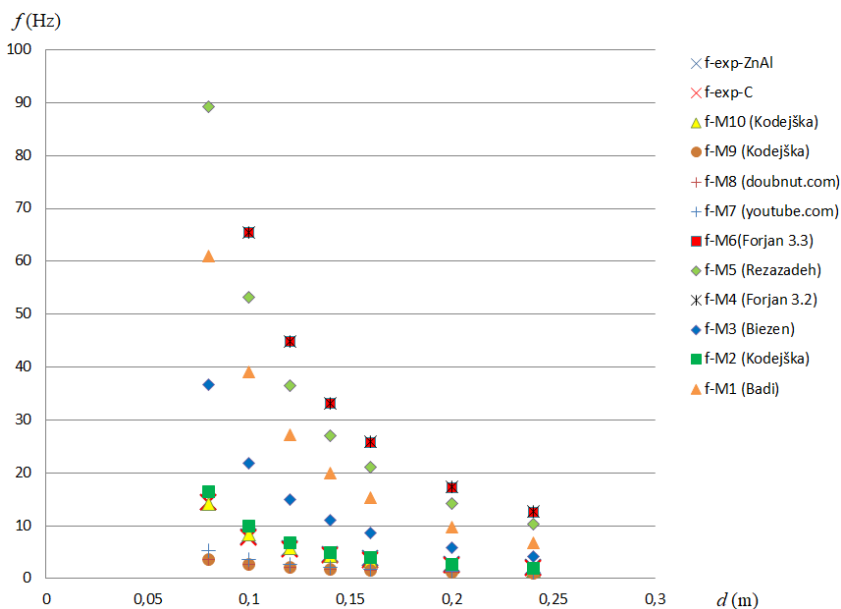
	Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}, r = 2,0 \text{ cm}$							PVC míček $m = 9,6 \text{ g}, r = 3,2 \text{ cm}$						
d/cm	8	10	12	14	16	20	24	8	10	12	14	16	20	24
L/cm	f/Hz							f/Hz						
100	14,29	8,55	5,71	4,17	3,11	2,35	1,79	x ¹⁾	5,56	4,13	2,97	2,37	1,70	1,31
80	14,29	7,75	5,41	4,27	3,39	2,53	1,91	x ¹⁾	5,03	3,51	2,50	1,76	1,50	1,35
60	13,33	8,20	5,62	4,15	3,22	2,20	1,60	x ¹⁾	5,62	3,77	2,99	2,33	1,62	1,36
40	12,66	7,81	5,65	4,15	3,22	2,25	1,68	x ¹⁾	4,70	3,33	2,54	2,02	1,72	1,50

¹⁾Neměřeno

Hodnoty predikované modelem M10, tj. vztahem (10), uvádí tabulka 2. Ve výpočtu frekvence pomocí rovnice (10) byly použity následující hodnoty veličin, které zůstaly v průběhu experimentu konstantní: $U = 150 \cdot 10^3 \text{ V}$, $\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$. Protože oba míčky byly duté, byla do vztahu (10) dosazena hodnota koeficientu $k_1 = \frac{2}{3}$.

Na obr. 3 jsou znázorněny teoretické hodnoty frekvencí, které predikují modely M1–M10 pro různé vzdálenosti desek d kondenzátoru při délce kyvadla $L = 80 \text{ cm}$. Současně jsou zde zobrazeny experimentálně naměřené hodnoty z tabulky 2 pro míček na stolní tenis potřený grafitem (f-exp-C), resp. nástříkem míčku Zn-Al barvou (f-exp-ZnAl).

Teoretické frekvence modelů M1–M10 v porovnání s experimentálními hodnotami

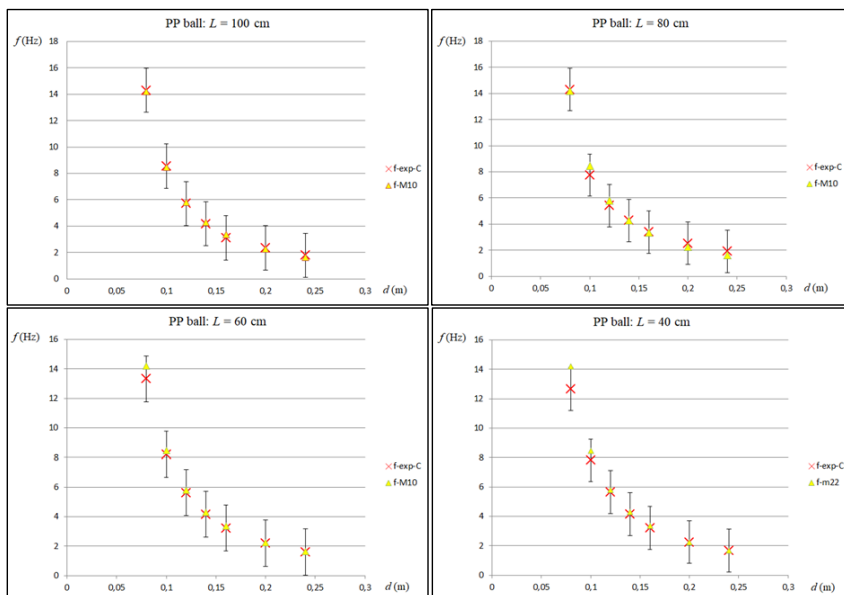


Obr. 3 Závislost frekvence kyvadla na vzdálenosti desek kondenzátoru

Graf na obr. 4, resp. obr. 5, ilustruje experimentální hodnoty z tabulky 1, resp. tabulky 2, které porovnává s teoretickými hodnotami námi navrženého modelu M10 (žlutý trojúhelník). Experimentální hodnoty jsou vyznačeny červeným (PP míček), resp. modrým (PVC míček) křížkem se standardní chybovou úsečkou.

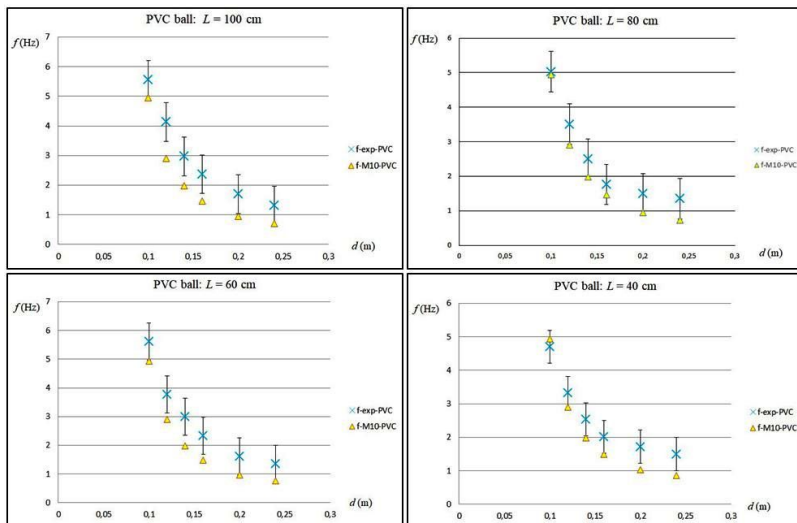
Tabulka 2 Teoretické hodnoty frekvence kmitů v závislosti na parametrech podle rovnice (7) modelu M10

	Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}$, $r = 2,0 \text{ cm}$ plocha desek kondenzátoru: $S = 0,04 \text{ m}^2$ $k_r = 0,80$, $\eta = 0,32$						PVC míček $m = 9,6 \text{ g}$, $r = 3,2 \text{ m}^2$ plocha desek kondenzátoru: $S = 0,02 \text{ m}^2$ $k_r = 0,74$, $\eta = 0,36$							
d/cm	8	10	12	14	16	20	24	8	10	12	14	16	20	24
L/cm	f/Hz						f/Hz							
100	14,2	8,47	5,80	4,3	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
80	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
60	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
40	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	1,0	0,8

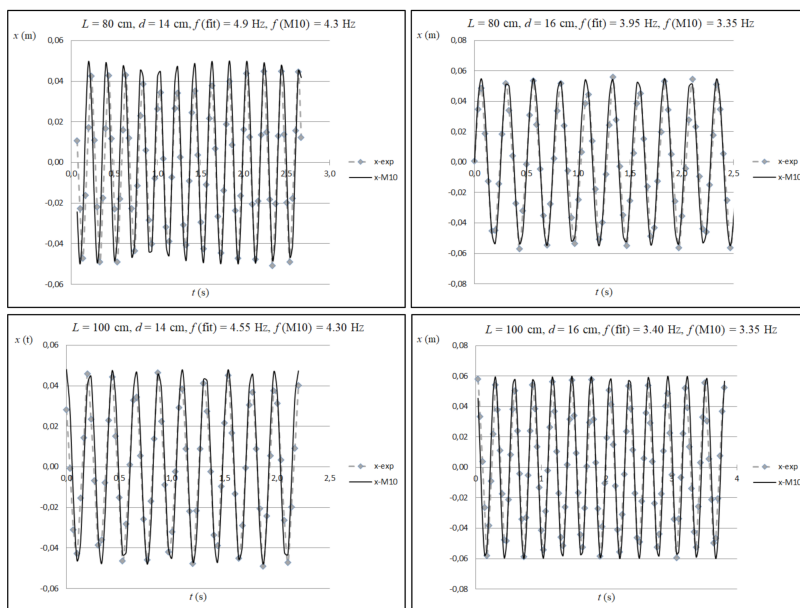


Obr. 4 Srovnání frekvencí modelu M10 s experimentálními daty u PP míčku

Porovnání teoretických hodnot pro výchylku kmitů daných rovnicí (11) s experimentálními hodnotami získanými pomocí video analýzy v programu Tracker je prezentováno na obr. 6.



Obr. 5 Srovnání frekvencí modelu M10 s experimentálními daty u PVC míčku



Obr. 6 Průběh kmitů reálného kyvadla (x-exp) a fitovací funkce (x-M10)

Z průběhu experimentálně naměřených dat (čárkovaná šedivá čára s body) a fitovací funkce (plná černá čára) založené na modelu M10 plyne, že přibližně po 1 s od začátku pohybu se kmity kyvadla ustálí a kyvadlo již kmitá s frekvencí, která v případě kyvadla o délce $L = 100$ cm, resp. $L = 80$ cm, odpovídá teoretické hodnotě dané modelem M10 s nejistotou 5 %, resp. 9 %. Podobné výsledky jsme získali i v případě vzdálenosti elektrod $d = 12$ cm a $d = 20$ cm. V případě vzdálenosti desek kondenzátoru $d = 10$ cm se nepodařilo provést fitování na experimentálně naměřená data, která vykazovala charakter rázů. Důvodem mohou být elektrostatické jevy zmiňované v [18], resp. nesplnění podmínky $d_{\min} \geq 4r$ zmíněné v pátém odstavci následující části.

4. Diskuze

Cílem této práce bylo navrhnout reálný model fyzického kyvadla, který by poskytoval dostatečně přesné hodnoty frekvence fyzického kyvadla kmitajícího v homogenním elektrickém poli, které je současně kolmé na tíhové pole. Model M10, který je popsán rovnicí (10), dává teoretické hodnoty, které se od experimentálně naměřených liší s přesností do 4 % v případě PP míčku, resp. do 15 % u PVC míčku.

Jak už bylo konstatováno Forjanem [4], Asanem [22] i jinými, značný vliv na výslednou frekvenci má hodnota restitučního koeficientu k_r a také velikost nejistoty měření koeficientu restituční [23]. V případě míčku na stolní tenis jsme ověřili platnost hodnoty $k_r = 0,80(2)$ uvedené v [4], která výrazným způsobem zpřesňuje výsledky teoretické předpovědi vzhledem k naměřeným datům. V zásadě lze konstatovat, že modely neuvažující restituční koeficient, nemohou poskytnout dostatečně přesné hodnoty odpovídající experimentu.

Dalším důležitým faktorem, který ovlivňuje výslednou frekvenci je hodnota parametru η , který udává, jaká část náboje je při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru přenesena na kouli kyvadla. V obou případech, které byly zmíněny v tabulce 2, byly hodnoty koeficientu η použité ve výpočtu frekvencí modelu M10 v souladu s hodnotami predikovanými teorií náhradního RC obvodu, který uvádíme v Appendixu D. V případě míčku na stolní tenis, resp. PVC míčku jsme pomocí video analýzy v programu Tracker dospěli pomocí měření zrychlení a rychlosti odraženého míčku k hodnotě $\eta = 0,33(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$. Pohyb PVC míčku je výrazně pomalejší, jak koneckonců plyne i z dat tabulky 2, a kontakt PVC míčku s deskou kondenzátoru trvá tedy delší dobu než u míčku na stolní tenis. Svou roli hraje v tomto případě i cca 3,3krát větší hmotnost PVC míčku,

kteřá přispívá k celkově přibližně polovičnímu zrychlení PVC míčku oproti míčku na stolní tenis.

Z tabulky 2 celkem zřetelně také plyne nezávislost naměřených hodnot frekvencí kmitů na délce kyvadla L . Délka kyvadla se začne projevovat teprve v okamžiku vypnutí VdGG, kdy kyvadlo začne konat tlumené kmity.

Posledním faktorem, který významně ovlivňuje naměřené hodnoty, je volba vzdálenosti d desek kondenzátoru. Jak můžeme pozorovat na obr. 5, ve všech případech je teoretická hodnota modelu M10 pro $d = 10$ cm v případě PVC míčku mimo interval standardní nejistoty experimentálně změřené hodnoty, zatímco v případě míčku na stolní tenis nic takového na obr. 4 nepozorujeme. Domníváme se, že tuto skutečnost lze vysvětlit tím, že zatímco u míčku na stolní tenis byla minimální vzdálenost $d = 8$ cm, což odpovídá dvojnásobku průměru míčku, v případě PVC míčku o průměru 6,4 cm byla minimální vzdálenost $d = 10$ cm menší než $4r$. Minimální vzdálenost mezi deskami kondenzátoru by tak měla být volena jako $d_{\min} \geq 4r$, optimálně se jeví volit tuto hodnotu jako trojnásobek průměru míčku, aby mělo kyvadlo dostatek prostoru a času zrychlit a dosáhnout tak rychlosti, kterou predikuje teoretický model. V případě maximální vzdálenosti desek nepozorujeme v případě lehčího míčku na stolní tenis žádný nesoulad mezi teorií a experimentem, v případě těžšího PVC míčku lze vysledovat na obr. 5 u vzdáleností desek kondenzátoru nad 20 cm narůstající odchylku teoretických hodnot od experimentálních. Elektrická síla ztrácí dominanci a začíná převládat působení tíhové síly.

Z pedagogického hlediska je důležitý rozbor působících sil. Na úrovni gymnázia lze odvodit vztah pro frekvenci kyvadla ze vztahu pro matematické kyvadlo, kde místo tíhové síly použijeme výslednou sílu, která je vektorovým součtem síly elektrické a tíhové. Na úrovni bakalářského studia lze již odvodit pohybovou rovnici fyzického kyvadla a následně diskutovat možná řešení.

Ačkoliv Forjan v [4] předpokládá v nejobecnějším modelu vliv odporových sil prostředí daných Newtonovým vztahem, který počítá s druhou mocninou rychlosti, díky čemuž nemůže být pohybová rovnice řešena analyticky, ale pouze numerickým modelováním, domníváme se, že tento předpoklad neplatí, a odporové síly lze zahrnout pomocí Stokesova vzorce, ve kterém je závislost odporové síly na rychlosti lineární.

Video analýzou byly změřeny maximální rychlosti pohybu míčku na stolní tenis s průměrnou hodnotou $v_{\max} = 1,0(2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je podle [13] sice hodnota odpovídající přechodové oblasti mezi laminárním a turbu-

lentním prouděním, ale velikost Reynoldsova koeficientu $R_e = 2\,302$ pro míček na stolní tenis o rychlosti $v = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je blíže hranici laminárního proudění, pro které je hodnota $R_e = 2\,300$. I hodnota $R_e = 2\,530$ pro rychlost $v = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je dle našeho názoru spíše příkladem laminárního proudění, pokud vezmeme v úvahu, že přechodná oblast je definována intervalem $2\,300 < R_e < 4\,000$, a teprve hodnoty větší než $4\,000$, odpovídající rychlosti míčku $v \geq 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, lze považovat za oblast turbulentního proudění. Je-li tedy při pohybu kyvadla závislost odporových sil na rychlosti jeho pohybu lineární, lze pohybovou rovnici řešit explicitně. Tento přístup lze zvolit v magisterském studijním programu, kde lze řešit příslušnou diferenciální rovnici.

Vzájemný kontakt nabitě koule kyvadla s nehybnou nabitou deskou kondenzátoru je zcela jistě ovlivněn i dalšími elektrostatickými jevy, které jsou diskutovány např. v [16–18]. Nicméně z pohledu klasického laboratorního cvičení na středoškolské nebo vysokoškolské úrovni nepřináší do vyhodnocení výsledků měření žádné podstatné změny.

Posledním aspektem z pedagogického pohledu je možnost využít vztah pro frekvenci kyvadla pro nepřímé určení výstupního napětí Van de Graffova generátoru nebo jiného zdroje vysokého napětí, kterým nabíjíme elektrody kondenzátoru. Měření frekvence kmitů pomocí klasického mikrofónu nebo bezdrátového čidla Vernier Go Direct Sound je jednoduché, stejně tak jako vyhodnocení periody v programech Vernier Logger Pro nebo Graphical Analysis. Měření frekvence kmitů kyvadla lze tak využít v rámci laboratorních cvičení jak na střední, tak na vysoké škole.

Závěr

Ukázali jsme, že jednoduchý model fyzického kyvadla zahrnující působení obou sil, tj. elektrické i tíhové, poskytuje dobrou shodu teoretických hodnot frekvencí kmitů s experimentálně naměřenými daty u různých druhů kyvadel. Kyvadla se lišila nejen délkou, ale i hmotností nebo průměrem koule. Nezanedbatelný vliv pak má i materiál, ze kterého je kyvadlo vyrobeno, protože jeho pružnost a pevnost ovlivňuje hodnotu koeficientu restituace.

Použití video analýzy v různých částech procesu zkoumání pohybu fyzického kyvadla pak dává vyučujícímu možnost atraktivním způsobem zpestit běžné měření periody kmitů kyvadla nebo pružinového oscilátoru o využití netradičních metod zkoumání dynamiky kyvadla na všech úrovních pedagogického vzdělávání při badatelsky orientované výuce.

Apendix A. Přehled teoretických vztahů pro frekvenci kyvadla v modelech M1–M9

Výpočet frekvence kmitů elektrostatického kyvadla v různém provedení udává Tabulka A1. Obecně ve všech uvedených vzorcích platí, že U je napětí mezi deskami kondenzátoru, d je vzdálenost mezi deskami kondenzátoru, d' je maximální vodorovná dráha kyvadla, ε je permitivita prostředí, S je plocha jedné desky kondenzátoru, m je hmotnost tělesa kyvadla, L je délka kyvadla a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Ostatní veličiny jsou vysvětleny v posledním sloupci Tabulky A1. Ve vzorcích je zachováno původní značení veličin, které autoři ve vzorcích použili.

Tabulka A1 Přehled vztahů pro frekvenci kyvadla modelů neuvažujících tíhové pole

Model	Autor	Reference	Vztah pro frekvenci	Pozn.
M1	Baddi	[1]	$f = \frac{U}{8d} \sqrt{\frac{C}{d\rho A}}$	C – kapacita kond., A – plocha desky kondenzátoru, ρ – hustota prostředí
M2	Kodejška	Apendix B	$f = \frac{U}{d'} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{8md}}$	
M3	Biezen	[3]	$f = \frac{U}{2\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{2mL}}$	
M4	Forjan	[4]	$f = \frac{U}{d'} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{8md} \cdot \frac{1+k_e}{1-k_e}}$	$k_e = 0,80(2)$ koeficient restituce
M5	Rezaeizadeh	[5]	$f = U \sqrt{\frac{A\varepsilon\eta}{8m} \cdot \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{1}{x^3}}$	A – plocha kond., η – koef. přenosu náboje Q , ϵ – koef. restituce, x – vzdálenost desek kond.

Prvním přístupem při výpočtu frekvence kmitů může být postup, který byl použit v [1], kde je pohyb kyvadla ve zjednodušeném pohledu považován za rovnoměrný přímočarý pohyb, při kterém pohybová síla překonává odporovou sílu vzduchu v souladu s Newtonovým vztahem pro odporovou sílu prostředí. Výsledný vztah pro frekvenci, který závisí nejen na napětí mezi deskami kondenzátoru, ale i na hustotě prostředí, ploše čelního řezu kyvadla udává první řádek v tabulce A1. Model je označen jako M1.

Druhý model M2 vychází z principu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu kyvadla mezi deskami kondenzátoru a je až na koeficient restituce shodný s modelem M4. Odvození vztahu pro frekvenci kmitů je uvedeno v Apendixu B.

Poslední možností je využití vzorce pro matematické kyvadlo, ve kterém je tíhové zrychlení g nahrazeno elektrostatickým zrychlením $a_e = \frac{QE}{m}$. Tento výklad je uveden např. v [3], a je vhodným zjednodušením pro pregraduální studenty bakalářského programu. Model je v tabulce A1 označen jako M3. Modely M4 a M5 byly podrobně diskutovány výše.

Tabulka A2 Přehled vztahů pro frekvenci kyvadla modelů zahrnujících tíhové pole

Model	Autor	Vztah pro frekvenci
M6	Forjan [4]	$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\arccos \left(\frac{A-B(k_e+1)}{A k_e - B(k_e+1)} \right) \right]^{-1}$ A, B definovány v [4], část 3.3
M7	Gotpagar [6]	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g + \frac{QE}{m}}{L}}$ E – intenzita el. pole, $\frac{QE}{m} = \frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}$, $\vec{F}_e \parallel \vec{F}_G$
M8	[7]	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + \left(\frac{QE}{m}\right)^2}}{L}}$ E – intenzita el. pole, $\frac{QE}{m} = \frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}$, $\vec{F}_e \perp \vec{F}_G$
M9	Kodejška Apendix B	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left(\frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}\right)^2}}$ Fyzické kyvadlo, $\vec{F}_e \perp \vec{F}_G$, $k_1 = \frac{2}{5}$ pro plnou kouli, $k_1 = \frac{2}{3}$ pro dutou kouli
M10	Kodejška část 1.1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left[\frac{L \varepsilon S \eta}{8md} \cdot \left(\frac{1+k_r}{1-k_r} \right) \cdot \left(\frac{U}{d'} \right)^2 \right]^2}}$ k_1 – viz M9, η – koeficient přenosu Q , k_r – koeficient restituce

Modely M6–M10 počítají kromě elektrické síly i s působením tíhového pole. V modelu M7 je elektrická síla rovnoběžná s tíhovou silou, což ale neodpovídá reálné situaci. Model M8 už zohledňuje skutečnost, že směr elektrické síly F_e je kolmý na tíhovou sílu F_G , nicméně vychází z jednoduššího modelu matematického kyvadla a neuvažuje vliv restitučního koeficientu, který naopak už zahrnují modely M4–M6.

Model M9, resp. M10 vychází z pohybové rovnice fyzického kyvadla, jak je ukázáno v části 1, protože každé reálné kyvadlo je příkladem fyzického kyvadla a použití zjednodušeného modelu matematického kyvadla vede k větší odchylce teoretických hodnot od experimentálně naměřených, jak ukazuje graf na obr. 3. Přehled modelů zahrnujících tíhovou sílu je uveden v tabulce A2.

Apendix B. Odvození frekvence kmitů modelu M2 a M9 bez pohybové rovnice

V modelu M2 je pohybová síla dle 2. Newtonova zákona $F = ma$ rovna konstantní elektrické síle uvnitř homogenního elektrického pole:

$$F_e = \frac{W_e}{d'} = \frac{QU}{d'} = \frac{CU^2}{d'} = \frac{\varepsilon SU^2}{dd'} = ma.$$

Zrychlení kyvadla vyjádříme ze vztahu pro dráhu zrychleného pohybu uraženou za polovinu periody T . Tato dráha je současně přibližně rovna redukované vodorovné vzdálenosti d' mezi deskami kondenzátoru. Platí-li, že $d' = \frac{1}{2}a \left(\frac{T}{2}\right)^2$, platí pro velikost zrychlení $a = 8d'/T^2 = 8d'f^2$. Dosazením do výše zmíněného vztahu pro elektrickou sílu získáme po příslušných matematických úpravách vztah pro frekvenci kyvadla uvedeného v druhém řádku tabulky A1. Současně je tento vztah pro frekvenci až na člen s koeficientem restituace stejný, jaký odvodil Forjan v modelu M4.

Model M9 je rozšířením modelu M8, který vychází z modelu matematického kyvadla, do tvaru platného pro fyzické kyvadlo. Současně jsme zohlednili skutečnou dráhu kyvadla ve vodorovném směru d' , která se liší od vzdálenosti d desek kondenzátoru.

Apendix C. Odvození momentu setrvačnosti tenké duté koule

Zlomek

$$\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = \frac{A^5 - B^5}{A^3 - B^3}$$

nejprve rozložíme na součín podle příslušných vzorců a po příslušných úpravách získáme výraz daný vztahem

$$\frac{A^5 - B^5}{A^3 - B^3} = \frac{A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4}{A^2 + AB + B^2}. \quad (C1)$$

Jestliže je slupka koule tenká, můžeme vnitřní poloměr B vyjádřit jako $B = A - \Delta r$, kde Δr je tloušťka slupky koule. Dosadíme-li předchozí

výraz do vztahu (C1) a vypočítáme-li limitu tohoto výrazu pro $\Delta r \rightarrow 0$, dostaneme řešení vyjádřené výrazem

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{A^4 + A^3(A - \Delta r) + A^2(A - \Delta r)^2 + A(A - \Delta r)^3 + (A - \Delta r)^4}{A^2 + A(A - \Delta r) + (A - \Delta r)^2} &= \\ &= \frac{5}{3}A^2 = \frac{5}{3}r_1^2. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li výsledek zpět do rovnice (6), získáme výsledný vztah pro moment setrvačnosti ve tvaru

$$J_0 = \frac{2}{5}m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = \frac{2}{5}m \frac{5}{3}r^2 = \frac{2}{3}mr^2.$$

Appendix D. Odvození vztahu pro výpočet koeficientu přenosu náboje η

Proces nabíjení i vybíjení je dán dobře známým exponenciálním zákonem, viz [8], který popisuje vztah

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (\text{D1})$$

kde člen RC udává tzv. časovou konstantu obvodu.

Reálný Van de Graaffův generátor je možné dle [15] reprezentovat paralelním RC obvodem. Hodnotu odporu R generátoru lze vypočítat z výstupního napětí VdGG a hodnoty maximálního zkratového proudu:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{150 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-6}} \Omega = 15 \text{ G}\Omega.$$

Nabíjecí kondenzátor má dle údajů výrobce kapacitu $C = 15 \text{ pF}$. Časová konstanta generátoru je tedy $RC = 225 \text{ ms}$.

Při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru dochází k přenosu pouze zlomku náboje z desky na míček, který odpovídá hodnotě koeficientu η . Tento koeficient musí nutně záviset na velikosti času, po který je kyvadlo v kontaktu s deskou kondenzátoru. Současně musí být daný výraz pro koeficient přenosu náboje bezrozměrný a pro přiměřeně dlouhý čas se musí jeho hodnota limitně rovnat 1 (úplné nabití). Těmto podmínkám zcela vyhovuje výraz v závorce rovnice (D1). Můžeme tedy *koeficient přenosu náboje* η zavést následujícím vztahem

$$\eta = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (\text{D2})$$

kde RC je časová konstanta zdroje napětí (v našem případě VdGG) a t je čas, po který je při kmitání kyvadla koule míčku v kontaktu s deskou kondenzátoru.

Tento čas můžeme experimentálně určit pomocí video analýzy v programu Tracker, který umožňuje změřit rychlost i zrychlení míčku při odrazu od desky kondenzátoru. Vyjádříme-li z obecného vztahu pro zrychlení $a = \Delta v / \Delta t$ změnu času Δt po kterou došlo ke změně rychlosti míčku při odrazu od desky, můžeme vypočítat přibližnou hodnotu tohoto času jako $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{1 - (-1)}{21} s = \frac{2}{21} s \doteq 0,095 s$ pro rychlost dopadu $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a zrychlení $a = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pro *koefficient přenosu náboje* η tedy můžeme rovnici (D2) formulovat ve tvaru rovnice

$$\eta = 1 - e^{-\frac{1}{RC} \frac{\Delta v}{a}}. \quad (\text{D3})$$

Hodnoty rychlostí a zrychlení míčku na stolní tenis i PVC míčku včetněň vypočítaného koeficientu η podle vztahu (D3) udává tabulka A3 (na konci článku za literaturou).

Výsledně experimentálně určené hodnoty koeficientu $\eta = 0,33(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$, pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček, byly použity pro výpočet frekvence kmitů modelu M10 a jsou ve výborné shodě s teoretickými hodnotami, které byly použity při fitování modelu M10 na experimentálně naměřená data frekvencí kyvadla.

Literatura

- [1] *Baddi, R.*: High voltage electrostatic pendulum [online] (2012). Dostupné z: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1201/1201.3092.pdf>.
- [2] *Ardan, W. a kol.*: Augmented Reality Experiment with a Van de Graaff Generator. Phys. Teach, roč. 60 (2022), č. 6, s 475–477. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/5.0037354>.
- [3] *Biezen, M. van.*: Physics 37.1 Gauss's Law Understood (29 of 29) Pendulum in an Electric Field [online], 2018. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=v5u3IPImm0>.
- [4] *Forjan, M. a kol.*: Mathematical modelling of the electrostatic pendulum in school and undergraduate education. Eur. J. Phys., roč. 35 (2014), 015022. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/1/015022>.
- [5] *Rezaeizadeh, A. – Mameghani, P.*: Thermodynamic model for bouncing charged particles inside a capacitor. Am. J. Phys., roč. 81 (2013), s. 632–635. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.4812322>.
- [6] *Gotpagar, A.*: Charge in circular Motion and pendulum [online], 2021. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=IOs4tv-rPS0>.

- [7] Time Period of Oscillation of a Charged Body [online]. Dostupné z: <https://www.studyadda.com/notes/jee-main-advanced/physics/electrostatics-capacitance/time-period-of-oscillation-of-a-charged-body/8088>.
- [8] *Armitage, J. L. a kol.*: An investigation into the influence of tribological parameters on the operation of sliding triboelectric nanogenerators. *Tribology International*, roč. 155 (2021), 106778. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106778>.
- [9] *Fotis, G., Vita, V., Maris, T. I.*: Rise Time and Peak Current Measurement of ESD Current from Air Discharges with Uncertainty Calculation. *Electronics* roč. 11 (2022), č. 16, 2507. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/electronics11162507>.
- [10] *Krotkov, R. V., Tuominen, M. T., Breuer, M. L.*: ‘Franklin’s Bells’ and charge transport as an undergraduate lab. *Am. J. Phys.*, roč. 69 (2001), č. 1, s. 50–55. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.1313519>.
- [11] *Alicki, R., Gelbwaser-Klimovsky, D., Jenkins, A.*: The Problem of Engines in Statistical Physics. *Entropy*, roč. 23 (2021), č. 8, 1095. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/e23081095>.
- [12] *Dem’yantseva, N. G. a kol.*: On the motion of charged particles in an alternating nonuniform electric field. *Tech. Phys.* roč. 57 (2012), s. 1465–1474. Dostupné z: <https://doi.org/10.1134/S1063784212110096>.
- [13] *Mohazzabi, P., Shankar, S. P.*: Damping of a Simple Pendulum Due to Drag on Its String. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, roč. 5 (2017), s 122–130. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2017.51013>.
- [14] *Quiroga, G. D., Ospina-Henao, P. A.*: Dynamics of damped oscillations: physical pendulum. *Eur. J. Phys.*, roč. 38 (2017), č. 6, 065005. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aa8961>.
- [15] *Mende, F. F.*: Operating Principle of Van De Graaff Generator, Collectorless Generators and the Multipliers of Constant Stress. *Global Journal of Science Frontier Research*, roč. 17 (2017), č. A5, 65–70. Dostupné z: <https://journalofscience.org/index.php/GJSFR/article/view/2107>.
- [16] *Lekner, J.*: Electrostatics of two charged conducting spheres. *Proc. R. Soc. A*, roč. 468 (2012), s. 2829–2848. Dostupné z: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0133>.
- [17] *Khachatourian, A. a kol.*: Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials. *J. Chem. Phys.*, roč. 140 (2014), 074107. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.4862897>.
- [18] *Saranin, V. A.*: About behavior of electrostatic pendulum near conducting or dielectric plate. *Journal of Electrostatics*, roč. 72 (2014), č. 4, s. 235–241. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2014.04.001>.

- [19] *ČVUT*: Fyzikální webové stránky – webFyzika. Řešené úlohy z mechaniky tuhého tělesa [online]. Dostupné z: http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_3.pdf.
- [20] *Kodejška, Č., Richterek, L., Říha, J.*: Buquoy's problem in an introductory physics course. *J. Phys.: Conf. Ser.*, roč. 1512 (2020), 012003. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1512/1/012003>.
- [21] *Kodejška, Č.*: Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru. *Matematika–Fyzika–Informatika*, roč. 33 (2024), č. 2, s. 121–128. Dostupné z: <https://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/818>.
- [22] *Asano, K.*: On the theory of an electrostatic pendulum. *Am. J. Phys.*, roč. 43 (1975), 423–427. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.9805>.
- [23] *Heckel, M. a kol.*: Can we obtain the coefficient of restitution from the sound of a bouncing ball? *Phys. Rev. E*, roč. 93 (2016), 032901. Dostupné z: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.032901>.

Tabulka A3 Experimentálně vypočítané hodnoty koeficientu přenosu náboje η podle (D3)

Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}$, $r = 2,0 \text{ cm}$	d/cm	L/cm	η	$a/(\text{m/s}^2)$	$v/(\text{m/s})$
	10	100	0,31	21,0	0,86
	12	100	0,33	21,1	0,95
	14	100	0,34	21,1	0,97
	16	100	0,34	21,1	0,98
	20	100	0,34	21,4	0,99
	10	80	0,30	20,8	0,84
	12	80	0,32	22,3	0,97
	14	80	0,32	25,4	1,09
	16	80	0,34	23,8	1,11
	20	80	0,33	22,5	1,02
	10	60	0,30	21,7	0,88
	12	60	0,33	26,4	1,17
	14	60	0,32	24,4	1,07
	16	60	0,33	22,8	1,03
20	60	0,33	22,8	1,04	
PVC míček $m = 9,6 \text{ g}$, $r = 3,2 \text{ cm}$	d/cm	L/cm	η	$a/(\text{m/s}^2)$	$v/(\text{m/s})$
	10	80	0,32	9,1	0,40
	14	80	0,35	9,6	0,47
	20	80	0,39	9,5	0,53