ZPRÁVY

54. Mezinárodní matematická olympiáda

Padesátý čtvrtý ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnil od 18. do 28. července 2013 v Kolumbii, v městech Barranquilla a Santa Marta. Soutěže se zúčastnilo 527 soutěžících z 97 zemí.

České družstvo tvořili tito žáci: *Michal Buráň* z Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodu, *David Hruška* z Gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni, *Mark Karpilovskij* z Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Josef Svoboda* z Gymnázia Frýdlant nad Ostravicí, *Štěpán Šimsa* z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích a *Radovan Švarc* z Gymnázia v České Třebové. Účast českého týmu byla z větší části dotována ministerstvem mládeže, školství a tělovýchovy (zhruba ze sedmdesáti procent), zbylé prostředky poskytl *Nadační fond Karla Janečka na podporu vědy a výzkumu*, bez jehož pomoci by se český tým soutěže jen obtížně zúčastnil. Vedoucím českého týmu byl *Martin Panák* z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, pozici zástupce vedoucího a pedagogického vedoucího zastal *Josef Tkadlec*, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Pro vedoucí národních delegací, kteří tvoří dohromady mezinárodní jury, začala olympiáda osmnáctého července v Barranquille, což je čtvrté největší kolumbijské město s více než 1 700 000 obyvateli. Po seznámení se z úlohami z tzv. shortlistu, tj. užšího výběru z návrhů zaslaných z různých zemí, zejména pak s jejich obtížností, vybrala jury šestici soutěžních úloh.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Santa Marty 21. července. Byli ubytováni v bungalovech v luxusním rekreačním středisku, přímo na pláži Karibiku.

Slavnostní zahájení olympiády se konalo v Barranquille, 22. července v prostorách Severní univerzity (Universitad del Norte). Zahájení se zúčastnila ministryně vzdělávání Kolumbie, *María Fernanda Campo Saavedra* a primátorka města Barranquilla *Elsa Noquera de la Espriella*. Obě dvě dámy oslovily účastníky olympiády svými projevy. Zásadní projev ovšem přednesla předsedkyně mezinárodní jury *María Falk de Losada*, jejíž autoritativní vedení jury jí vyneslo mezi vedoucími národních týmů přezdívku „železná lady“. Po úvodních projevech následovalo defilé všech zúčastněných družstev.

Soutěžními dny byly 23. a 24. červenec. Účastníci soutěže každý z těchto dnů řešili během čtyř a půl hodiny tři úlohy.

V dalších dnech pobytu byly pro soutěžící připraveny zajímavé exkurze a soutěže, nicméně soutěžící si užívali především Karibského moře a velmi dobré stravy v přilehlém rekreačním středisku. Vedoucí se ve stejném čase věnovali opravám úloh svých žáků. Jejich řešení byla po soutěži zkopírována a nezávisle opravena též koordinátory, kterými byli zkušení matematici z celého světa. Po opravách se vedoucí sešli s koordinátory při diskusi o závěrečném bodovém hodnocení.

České družstvo dosáhlo letos výborných výsledků. Po osmi letech jsme se znovu dočkali zlaté medaile, kterou byl oceněn Štěpán Šimsa z Gymnázia Josefa Jungmanna v Litoměřicích za zisk 31 bodů.

Další tři naši soutěžící – Michal Buráň (20 b.), Mark Karpilovskij (18 b.) a Radovan Švarc (17 b.) pak získali bronzové medaile. Ani zbylí dva účastníci, David Hruška a Josef Svoboda, však neodjeli s prázdnou. Oba byli oceněni čestnými uznáními za (aspoň) jednu zcela bezchybně vyřešenou úlohu. Celkově české družstvo získalo 108 bodů a skončilo v neoficiálním pořadí zemí na 37. místě.

Absolutními vítězi olympiády se stali Číňan Yutao Liu a Jihokorejec Eunsoo Jee se shodným ziskem 41 bodů (o jeden bod méně, než bylo dosažitelné maximum). V soutěži družstev se vše vrátilo k obvyklému stavu, když opět zvítězila Čína a nechala za sebou loňského překvapivého vítěze Jižní Koreu. Třetí se opět umístily Spojené státy americké.

V další části uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh.

1. soutěžní den (23. 7. 2013)

1. Dokažte, že pro libovolnou dvojici kladných celých čísel k a n existuje k kladných celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (ne nutně různých) takových, že

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Japonsko)

2. Rozmístění 4027 bodů v rovině nazveme *kolumbijským*, jestliže je 2013 z těchto bodů obarveno červeně, 2014 modře a žádné tři z těchto bodů neleží v přímce. O skupině přímek v rovině řekneme, že je *dobrá* pro dané rozmístění, jestliže

- žádná z přímek neprochází žádným bodem rozmístění,
- žádná z částí, na které je rovina přímkami rozdělena, neobsahuje body různých barev.

Najděte nejmenší k takové, že pro libovolné kolumbijské rozmístění 4027 bodů existuje skupina k dobrých přímek.

(Austrálie)

3. V trojúhelníku ABC nechť se kružnice připsaná ke straně BC dotýká této strany v bodě A_1. Analogicky nechť body B_1, resp. C_1, jsou body dotyku kružnic připsaných ke straně AC, resp. ke straně AB, s těmito stranami. Nechť střed kružnice opsané trojúhelníku $A_1B_1C_1$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý.
Kružnice připsaná trojúhelníku ABC ke straně BC je kružnice, která se dotýká úsečky BC, polopřímky opačné k polopřímce BA a polopřímky opačné k polopřímce CA. Obdobně je definována kružnice připsaná ke straně AC, resp. AB.

(Rusko)

2. soutěžní den (24. 7. 2013)

4. Buď ABC ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek H a nechť W je bod na straně BC ($W \neq B$, $W \neq C$). Označme M, resp. N, patu výšky z bodu B, resp. z bodu C. Označme dále ω_1 kružnici opsanou trojúhelníku BWN a nechť X je bod na této kružnici takový, že úsečka WX je průměrem kružnice ω_1. Analogicky nechť ω_2 je kružnice opsaná trojúhelníku CWM a Y bod na ní takový, že úsečka WY je průměrem kružnice ω_2. Dokažte, že body X, Y a H leží na přímce. *(Thajsko)*

5. Nechť $\mathbb{Q}$ značí množinu kladných racionálních čísel. Uvažujme všechny funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ splňující

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,

(ii) $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ pro libovolná $x, y \in \mathbb{Q}$,

(iii) existuje $a \in \mathbb{Q}$, $a > 1$ takové, že $f(a) = a$.

Dokažte, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{Q}$.

(Bulharsko)

6. Nechť $n \geq 3$ je celé číslo a mějme $n+1$ bodů, rovnoměrně rozložených na kružnici. Uvažujme o očíslováních těchto bodů čísly $0, 1, \ldots, n$ (každé číslo je použito právě jednou). Dvě taková očíslování považujeme za stejná, jestliže jedno přejde na druhé nějakou rotací kružnice. Očíslování nazveme *krásným*, jestliže pro libovolná čtyři čísla $0 \leq a < b < c < d \leq n$ taková, že $a + d = b + c$, tětiva spojující body očíslované a a d neprotíná tětivu spojující body očíslované b a c.

Nechť M značí počet krásných očíslování a N počet uspořádaných dvojic (x, y) kladných celých čísel takových, že $x + y \leq$ $\leq n$ a $\mathrm{NSD}(x, y) = 1$. Dokažte rovnost

$$M = N + 1.$$

(Rusko)

Příští, 55. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v *Kapském Městě* (Jihoafrická republika) v termínu od 3. do 13. července 2014.

Martin Panák

7. Středoevropská matematická olympiáda

7th Middle European Mathematical Olympiad

Sedmý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se uskutečnil ve dnech 22.–28. srpna 2013 v maďarském Veszprému. Soutěže se zúčastnilo 60 žáků z deseti zemí střední Evropy (České republiky, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska). Do reprezentačních družstev byli přitom vybráni pouze soutěžící, kteří jsou ve školním roce 2013/2014 ještě žáky středních škol a v roce 2013 nebyli členy reprezentačního družstva na Mezinárodní matematické olympiádě (IMO).

České reprezentační družstvo pro 7. ročník MEMO bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 62. ročníku české MO. Do družstva České republiky tak byli nominováni *Martin Hora* z G v Plzni, Mikulášské nám. 23, *Matěj Konečný* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8, *Viktor Němeček* z G v Jihlavě, *Tomáš Novotný* z G v České Lípě, *Martin Raszyk* z G v Karviné a *Pavel Turek* z G v Olomouci–Hejčíně. Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci Jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Michal Rolínek* z Institutu vědy a technologie ve Vídni. Česká účast byla hrazena z prostředků Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Jednoty českých matematiků a fyziků. Přípravné soustředění českého týmu před MEMO finančně podpořil Motorpal Jihlava.

Všichni účastníci přicestovali do Veszprému 22. srpna a byli ubytováni na vysokoškolských kolejí místní Panonské univerzity. Den po příjezdu členové jury, složené z vedoucích jednotlivých družstev, zasedali na Fakultě informačních technologií (FIT), kde vybrali soutěžní úlohy pro oba dny a připravili jejich překlady do mateřských jazyků.

V sobotu 24. srpna proběhla na FIT soutěž jednotlivců a o den později tamtéž i soutěž družstev. První soutěžní den byly žákům předloženy v soutěži jednotlivců čtyři úlohy, druhý den v soutěži družstev osm úloh. První den měli soutěžící na vypracování řešení 5 hodin čistého času, každý příklad byl ohodnocen nejvýše 8 body. Druhý den řešila jednotlivá reprezentační družstva společně osm úloh, opět po dobu pěti hodin a každý příklad byl ohodnocen opět nejvýše 8 body. Jako osmá úloha v soutěži družstev byla zařazena i česká úloha od *Michala Rolínka.* Zadání soutěžních úloh uvádíme na konci příspěvku spolu se zemí, která úlohu navrhla.