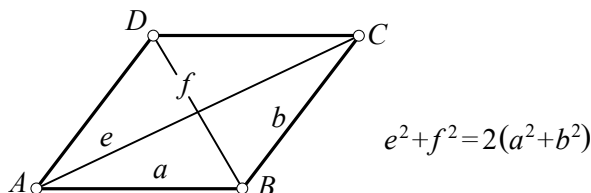


Spřízněné trojúhelníky

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Věta o rovnoběžníku říká, že součet čtverců jeho úhlopříček je roven dvojnásobku součtu čtverců dvou sousedních stran (obr. 1). V učebnicích bývá tento vztah uváděn okrajově, spíš jako příklad na aplikaci kosinové nebo Pythagorovy věty, viz např. [3, str. 77–78]. Naproti tomu podle V. Dlaba [1] jde o poznatek základní. Zkusme prozkoumat jeho využitelnost.



Obr. 1 Věta o rovnoběžníku

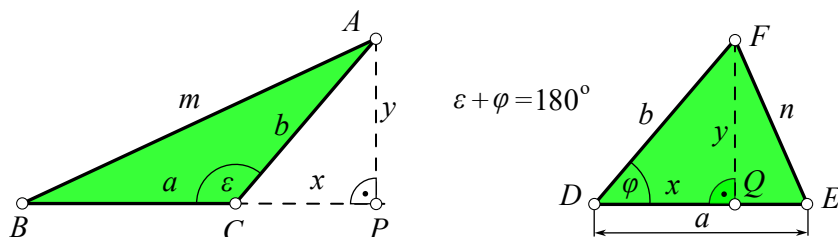
Při řešení problémů se obvykle argumentuje matematickými větami v jejich klasické formulaci. V našem případě tuto zásadu obejdeme přeformulováním původního poznatku tak, aby byl žák lépe motivován a nemusel se při složitějších situacích zatěžovat hledáním potřebných rovnoběžníků.

Dva trojúhelníky nazveme *spřízněné*, právě když se shodují ve dvou stranách a úhly těmito stranami sevřené se doplňují do 180° .

Co lze zjistit ze spřízněnosti trojúhelníků ABC a EFD na obr. 2? Mají stejné výšky ke shodným stranám, proto se jejich obsahy rovnají. Navíc aplikací Pythagorovy věty na pravoúhlé trojúhelníky ABP , EFQ , ACP dostáváme

$$m^2 = (a+x)^2 + y^2, \quad n^2 = (a-x)^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = b^2$$

a odtud po eliminaci proměnných x a y větu 1.



Obr. 2 Spřízněné trojúhelníky

Věta 1

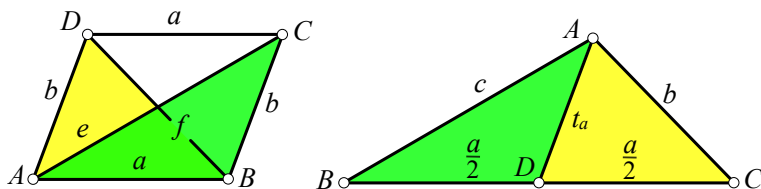
Délky stran spřízněných trojúhelníků splňují při označení podle obr. 2 vztah

$$m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (1)$$

Další poznatky lze objevovat sestavováním jejich konfigurací, v myslí nebo pomocí papírových modelů.

Umístěním trojúhelníků tak, aby měly společnou jednu ze svých stran, lze nalézt již zmíněnou větu o rovnoběžníku (obr. 3 vlevo) nebo vztah určující délku těžnice trojúhelníku pomocí délek jeho stran (tzv. *Apolloniouvu větu*, obr. 3 vpravo):

$$2t_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}. \quad (2)$$



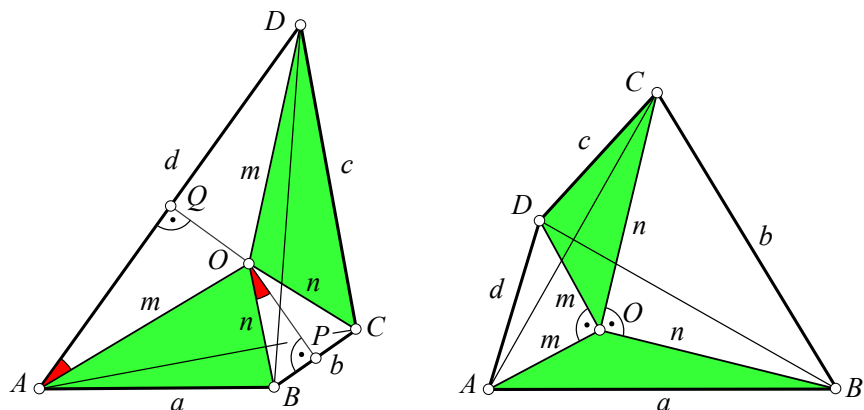
Obr. 3 Dvě základní seskupení spřízněných trojúhelníků

Další konfigurace se společnou stranou již nejsou tak zajímavé. Zabývejme se raději situacemi, kdy je průnikem obou trojúhelníků pouze vrchol při doplňujících se úhlech.

Jednu z možností představuje obr 4 vlevo. Platí

$$a^2 + c^2 = 2(m^2 + n^2) \quad \text{a} \quad \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{d}{m}\right)^2 = 4, \quad (3)$$

neboť druhý ze vztahů (3) plyne z podobnosti trojúhelníků AOQ , OBP a Pythagorovy věty (ověření přenechme čtenáři). Díky těmto vztahům je čtyřúhelník $ABCD$ určen libovolnými 4 prvky množiny $\{a, b, c, d, m, n\}$.



Obr. 4 Útvar $ABCD$ určený spřízněnými trojúhelníky AOB a DOC

Jsou-li rovnoramenné trojúhelníky BCO a DAO pravoúhlé, obr. 4 vpravo, pak $b = n\sqrt{2}$, $d = m\sqrt{2}$ a po dosazení do (3) zjistíme

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Takový čtyřúhelník má shodné a navzájem kolmé úhlopříčky, protože rotace $\mathcal{R}_{O,90^\circ}$ zobrazuje B na C a D na A . Poznatek zobecníme do věty 2 a dokážeme bez využití spřízněných trojúhelníků.

Věta 2

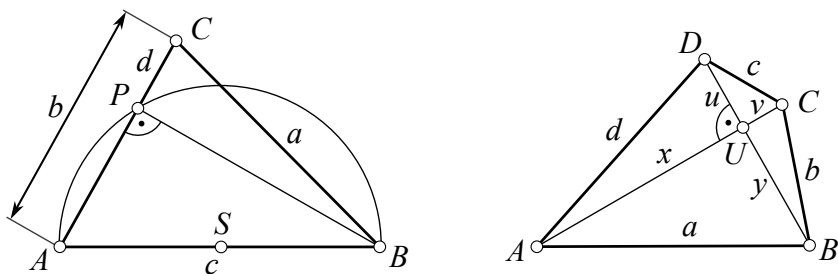
Ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2 \quad \text{právě tehdy, když} \quad AC \perp BD. \quad (4)$$

Důkaz. Využijeme Pythagorovu větu s jejím obrácením, k nimž přidáme snadno ověřitelné tvrzení, že v trojúhelníku ABC při obvyklém značení stran a úhlů platí

$$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow 0 < \gamma < 90^\circ \quad \text{a} \quad a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow 180^\circ > \gamma > 90^\circ.$$

(Důsledek kosinové věty, jenž lze dokázat i takto: Platí-li $0 < \gamma < 90^\circ$, pak s využitím obr. 5 vlevo dostáváme $a^2 + b^2 > |BP|^2 + |AP|^2 = c^2$.



Obr. 5 K důkazu věty 2

Pro $180^\circ > \gamma > 90^\circ$ je důkaz vztahu $a^2 + b^2 < c^2$ analogický. Obrácení je zřejmé, vyčerpali jsme všechny možné hodnoty γ .)

Předpokládejme tedy, že jsou úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ kolmé, obr. 5 vpravo. Aplikací Pythagorovy věty na trojúhelníky s pravým úhlem při vrcholu U dostáváme

$$a^2 + c^2 = (x^2 + y^2) + (u^2 + v^2) = (v^2 + y^2) + (x^2 + u^2) = b^2 + d^2.$$

Nejsou-li úhlopříčky AC a BD kolmé, pak při ostrém úhlu AUB platí

$$a^2 + c^2 < (x^2 + y^2) + (u^2 + v^2) = (v^2 + y^2) + (x^2 + u^2) < b^2 + d^2.$$

Analogicky pro $|\sphericalangle AUB| > 90^\circ$ obdržíme $a^2 + c^2 > b^2 + d^2$.

Průzkum čtyřúhelníku $ABCD$ složeného z dvojic (AOB, COD) a (BOC, DOA) spřízněných trojúhelníků (obr. 6) umožňuje nalézt následující větu.

Věta 3

Čtyřúhelník $ABCD$ má kolmé úhlopříčky, právě když jej průsečík O jejich os rozdělí na dvojice (AOB, COD) a (BOC, DOA) spřízněných trojúhelníků.

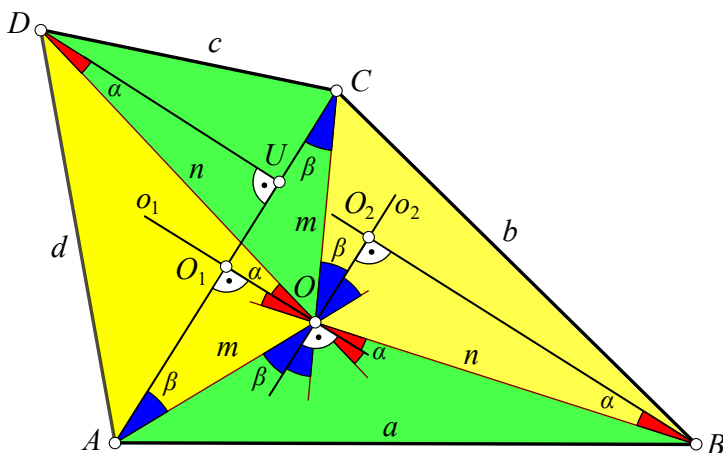
Důkaz. Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ složen z dvojic (AOB, COD) a (BOC, DOA) spřízněných trojúhelníků, pak při označení podle obr. 6 platí

$$a^2 + c^2 = 2(m^2 + n^2) = b^2 + d^2$$

a podle věty 2 je $AC \perp BD$.

Obráceně, je-li $AC \perp BD$ a O průsečík os o_1 a o_2 úhlopříček AC a BD , pak $o_1 \parallel BD$, $o_2 \parallel AC$ a $o_1 \perp o_2$. Položme

$$m = |AO| = |CO| \quad \text{a} \quad n = |BO| = |DO|. \quad (5)$$



Obr. 6 Čtyřúhelník složený ze dvou dvojic spřízněných trojúhelníků

Snadno lze ověřit shodnost všech šesti úhlů modře vyznačených na obr. 6. Velikost libovolného z nich nechť je β . Analogicky označme α velikost každého ze šesti červeně vyznačených úhlů.

S využitím kolmosti přímek o_1 a o_2 zjistíme, že $|\sphericalangle AOB| = 90^\circ + \alpha + \beta$, $|\sphericalangle DOC| = 90^\circ - \alpha - \beta$, a tak $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle DOC| = 180^\circ$. Navíc platí (5), trojúhelníky AOB a COD jsou spřízněné. Trojúhelníky BOC a DOA jsou zřejmě spřízněné též.

V roce 2010 odvodil J. Šimša pomocí vektorové algebry nerovnost (6) pro délky stran a úhlopříček čtyřúhelníku [2, str. 192]. Dokážeme ji názorněji.

Věta 4

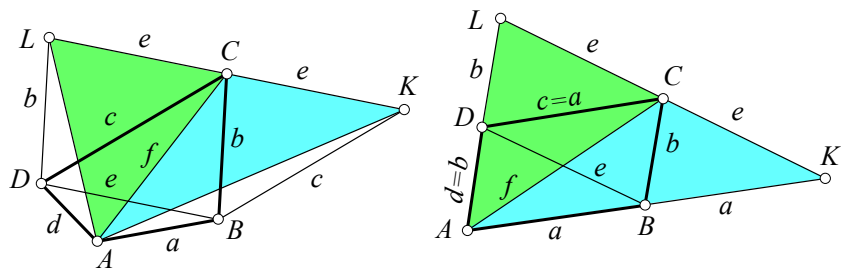
Délky stran a úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ splňují vztah

$$(|AB| + |CD|)^2 + (|BC| + |DA|)^2 \geq 2(|AC|^2 + |BD|^2), \quad (6)$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.

Důkaz. Sestrojením obrazu L vrcholu B v symetrii podle středu strany CD a obrazu K bodu D v souměrnosti podle středu strany BC získáme rovnoběžníky $BCLD$ a $DBKC$, obr. 7 vlevo. Trojúhelníky ACK a ACL jsou spřízněné, platí

$$|AK|^2 + |AL|^2 = 2(e^2 + f^2). \quad (7)$$



Obr. 7 K důkazu věty 4

Odtud a z trojúhelníkových nerovností $a + c \geq |AK|$ a $b + d \geq |AL|$ plyne

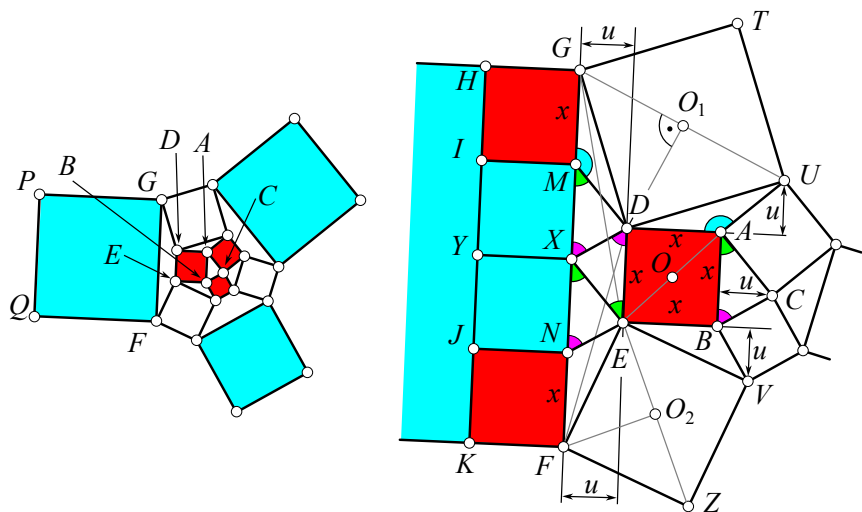
$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \geq |AK|^2 + |AL|^2 = 2(e^2 + f^2).$$

Rovnost nastává, právě když bod B leží uvnitř úsečky AK a D uvnitř úsečky AL , obr. 7 vpravo, to znamená právě když $ABCD$ je rovnoběžník.

Dosud jsme se zabývali využitím věty 1. Uveďme ještě příklad na uplatnění vlastnosti stejných obsahů spřízněných trojúhelníků.

Příklad 1.

Dokažte, že součet obsahů modře vybarvených čtverců v konfiguraci na obr. 8 vlevo je šestnáctkrát větší než součet obsahů červeně vybarvených čtverců.



Obr. 8 K řešení příkladu 1

Řešení. Stačí ukázat, že má čtverec $GPQF$ čtyřikrát delší stranu než čtverec $ADEB$.

Označme po řadě O , O_1 a O_2 středy čtverců $ADEB$, $TGDU$ a $VEFZ$ (viz detail v pravé části obr. 8). V posloupnosti DEF , BEV , BAC , DAU , DEG , jsou každé dva sousední členy spřízněnými trojúhelníky. Všechny tyto útvary mají stejný obsah, a tedy i stejnou výšku u k základně délky x . Vrcholy F a G tedy mají stejnou vzdálenost u od přímky ED , tedy platí $FG \parallel ED$.

Obraz čtverce $DABE$ v otočení $\mathcal{R}_{O_1, -90^\circ}$ je čtverec $GMIH$, přičemž $M \in FG$ a $H \in PG$. Analogicky zobrazí rotace $\mathcal{R}_{O_2, 90^\circ}$ čtverec $EBAD$ na čtverec $FNJK$.

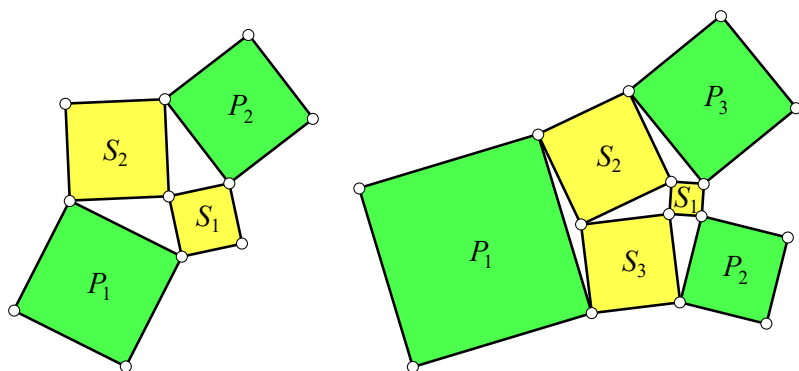
Je-li dále X bod souměrně sdružený s vrcholem C v symetrii se středem O , pak jsou trojúhelníky ABC , EDX shodné a $X \in FG$. Snadno lze ověřit, že se úhly vyznačené na obr. 8 stejnými barvami shodují, a tak jsou trojúhelníky XNE , EDX a MXD navzájem shodné (úhlopříčka totiž dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky) a platí $|FG| = 4|ED|$.

Ověření, že analogické rovnosti splňují i zbývající dvě dvojice čtverců, je již zřejmé.

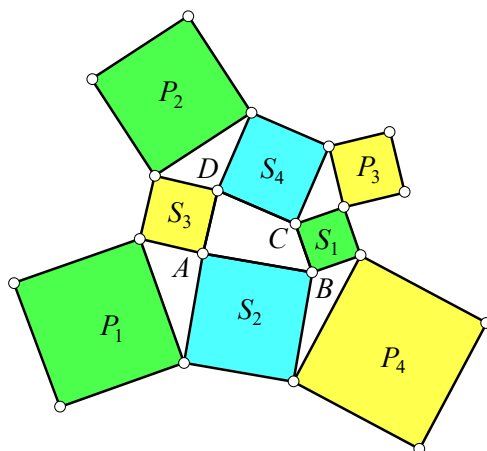
Na několika příkladech jsme si ukázali, že je z didaktického hlediska vhodnější nahlížet na větu o rovnoběžníku jako na vlastnost dvojice spřízněných trojúhelníků. Trojúhelníky zbavené svého uvěznění v rovnoběžníku můžeme v dané rovině libovolně umísťovat. Úvahy o možnostech jejich vzájemné polohy přispívají k rozvoji geometrického myšlení a nabízí prostor pro objevování dalších poznatků.

Úlohy k samostatnému procvičení

1. Na obrázcích k důkazům vět 2 až 4 jsou nakresleny jen konvexní čtyřúhelníky $ABCD$. Ověřte, že věty platí i pro nekonvexní čtyřúhelníky.
2. Dokažte, že pro obsahy čtverců na obr. 9 vlevo platí $P_1 + P_2 = 2(S_1 + S_2)$.
3. Dokažte, že pro obsahy čtverců v seskupení na obr. 9 vpravo platí $P_1 + P_2 + P_3 = 3(S_1 + S_2 + S_3)$. (Nizozemská MO, 1992)
4. Nechť $ABCD$ je konvexní pravoúhelník v němž $|AB| + |CD| = \sqrt{2}|AC|$ a $|BC| + |DA| = \sqrt{2}|BD|$. Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník. (Česko-Polsko-Slovenské střetnutí juniorů, 2010.)
5. Dokažte, že pro obsahy čtverců v seskupení na obr. 10 vlevo ($ABCD$ je konvexní čtyřúhelník) platí $P_1 + P_2 + 4S_1 = P_3 + P_4 + 4S_3$ a $P_2 + P_3 + 4S_2 = P_4 + P_1 + 4S_4$.
(Nápověda: Do obrázku dokreslete úhlopříčky AC a BD .)



Obr. 9 K úlohám 2 a 3



Obr. 10 K úloze 5

Literatura

- [1] Dlab, V.: Důkladné porozumění elementární matematice. Učitel matematiky, roč. 17, č. 3 (71), 2009, s. 169–182.
- [2] Elbelová, J.: Vektorové metody v eukleidovské geometrii. PřF MU, Brno, 2011. Dostupné na <https://www.math.muni.cz/~simsa/>
- [3] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.