Numerické charakteristiky výrokových spojek

MILOSLAV ZÁVODNÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Základy výrokové logiky se objevují v ŠVP většiny středních škol. Očekávané výstupy jsou obvykle: žák rozezná výrok, vytváří negace výroků, čte a zapisuje tvrzení v symbolickém jazyce matematiky, užívá správně logické spojky, rozliší správný a nesprávný úsudek, zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému, vytváří hypotézy, zdůvodňuje.

Pracuje se přitom s klasickou (dvouhodnotovou) výrokovou logikou, v níž výroku přisuzujeme jen jednu z možností „pravda", anebo „nepravda", jimž přiřazujeme tzv. *pravdivostní hodnotu*, a to obvykle 1 (pravdivému výroku) a 0 (nepravdivému výroku). Pravdivostní hodnotou výroku klasické výrokové logiky (výrokové proměnné) je tedy jedno z čísel 0, nebo 1.

V článku značíme výroky velkými písmeny, např. A, B, X aj., jejich pravdivostní hodnoty (prvky množiny $\{0, 1\}$) písmeny malými, např. a, b, x aj. Zapíšeme-li výroky v symbolické podobě, získáváme tzv. *formule výrokové logiky.* Budeme je zapisovat v infixové notaci, obdobně jako početní výrazy v matematice.

Poznámka. Již ve starověku vzbuzoval Aristotelem zavedený princip dvouhodnotovosti logiky pochyby v souvislosti s výroky, hovořícími o budoucích událostech. Výrok „1. srpna příštího roku bude pršet." dnes není pravdivý ani nepravdivý. Polský matematik Jan Łukasiewicz soudil, že v běžném jazyce existují výroky, které nejsou ani pravdivé ani nepravdivé, a musíme jim přiřadit nějakou třetí hodnotu. Označil ji $\frac{1}{2}$, jako prostřední hodnotu mezi „pravdou", což je 1, a „nepravdou", což je 0. Máme tak tříhodnotovou logiku. (Přehled o neklasických logikách najdete např. v [4, s. 219–226].) Pro matematiku je však důležité, zda výrok (matematická věta) platí, nebo neplatí – vystačíme se dvěma hodnotami.

Ke spojování výroků slouží výrokové spojky, reprezentované logickými (pravdivostními) funkcemi. Spojka může spojovat větší počet výroků, pokud spojuje n výroků, mluvíme o n-argumentové spojce, např. „Platí právě jedna z deseti uvedených možností." je desetiargumentová spojka.

Pravdivostní funkce příslušná n-argumentové výrokové spojce je předpis, který každé uspořádané n-tici čísel 0 a 1 přiřadí číslo 0, anebo 1. Počet všech různých n-argumentových výrokových spojek je 2^{2^n}.[1)] Existují tedy 4 jednoargumentové spojky a 16 dvojargumentových spojek.

Matematická logika vybrala z přirozeného jazyka ty spojky, které nejlépe vystihují různé logické funkce. Nejčastěji používanými spojkami jsou jednoargumentová (unární) negace „není pravda, že" (budeme značit $'$ jako v [2], často je negace značena $\neg$) a dvojargumentové (binární) spojky: disjunkce „nebo" (nevylučovací) ($\vee$), konjunkce „a zároveň" ($\wedge$), implikace „jestliže, pak" ($\Rightarrow$) a ekvivalence „právě když" ($\Leftrightarrow$).

Námi užívané výrokové spojky (logické funkce) jednoznačně definujeme pravdivostní tabulkou takto:

P	P'
1	0
0	1

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Při dokazování správnosti úsudku, tj. vyhodnocení složeného výroku, je obvykle používána *tabulka pravdivostních hodnot.*

Méně časté jsou „algebraické" úpravy formulí, využívající logické zákony (tautologie) podle věty o nahrazení, viz např. [3].

Věta (o nahrazení)

Buďte φ, ψ, η, χ výrokové formule a P výroková proměnná vyskytující se v φ. Pak platí: (1) je-li φ tautologie, pak nahrazením všech výskytů výrokové proměnné P ve formuli φ formulí ψ získáme opět tautologii, (2) je-li $\eta \Leftrightarrow \chi$ tautologie a ψ formule vzniklá z φ nahrazením některých výskytů podformule η formulí χ, pak $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

„Algebraický" způsob vyhodnocování logických formulí je však mnohem pohodlnější za použití *Booleovy algebry*, viz např. výbornou stať [2].

1) Na každém místě uspořádané n-tice se může vyskytovat 0, nebo 1, každé místo n-tice tak lze vyplnit 2 způsoby. Všechna místa n-tice lze tedy vyplnit 2^n způsoby. Pravdivostní funkce přiřadí každému vzoru (každé z těchto n-tic) číslo 0, nebo 1. Pro první vzor existují 2 možnosti přiřazení, pro první a druhý vzor existují $2 \cdot 2$ možnosti přiřazení, pro všech 2^n vzorů existuje $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^n\text{-krát}} = 2^{2^n}$ přiřazení.

Numerické charakteristiky výrokových spojek se k vyhodnocování logických formulí většinou nepoužívají. Podívejme se tedy blíže na tuto „aritmetickou“ metodu.

Z definice výrokových spojek je zřejmé, že

1. $a' = 1 - a$,
2. $(a \wedge b) = ab$,
3. $(a \vee b) = a + b - ab \ \ (= 1 - a'b' = a + a'b = b + b'a)$,
4. $(a \Rightarrow b) = 1 - a + ab \ \ (= 1 - ab' = a' + ab = b + a'b')$,
5. $(a \Leftrightarrow b) = 1 - (a-b)^2 \ \ (= ab + a'b' = 1 - ab' - a'b)$.

Porovnáním 3 a 4 vidíme, že $(a \Rightarrow b) = 1 - ab'$ a $(a' \vee b) = 1 - ab' = (ab')'$. Získáváme tak tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$ a $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B')'$. Protože platí rovnost $1 - ab' - a'b = (1 - ab')(1 - ba')$, je tautologií formule $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$. Dále pak $(A \wedge B')' \Leftrightarrow (A' \vee B)$, odkud snadno získáme De Morganovy zákony.

Při numerických úpravách budeme využívat vztahy $x^2 = x$ (platí $1^2 = 1$, $0^2 = 0$), $x \cdot x' = 0$ (platí $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$), $x + x' = 1$, $(x - x')^2 = 1$.

Příklad 1

Dokažte trojici vztahů 5 z výše uvedené tabulky.

Řešení.

$$(a \Leftrightarrow b) = ((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)) = (1 - ab') \cdot (1 - ba') =$$
$$= \underline{1 - ab' - ba'} = a + a' - ab' - ba' = a(1 - b') + a'(1 - b) = \underline{ab + a'b'}$$

Další možné vyjádřeni:

$$1 - ab' - ba' = 1 - a(1 - b) - b(1 - a) = 1 - a - b + 2ab =$$
$$= 1 - (a - 2ab + b) = 1 - (a^2 - 2ab + b^2) = \underline{1 - (a - b)^2}.$$

Nyní již máme k dispozici vše potřebné k tomu, abychom mohli složené výroky „počítat“, přitom znak $=$ bude sloužit i pro formální oddělování formulí.

Příklad 2

Dokažte zákony absorpce: a) $(A \vee (A \wedge B)) \Leftrightarrow A$, b) $(A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow A$.

Řešení. Vypočteme:

a) $$(a \vee (a \wedge b)) \Leftrightarrow a = (a \vee ab) \Leftrightarrow a = (a + ab - a^2 b) \Leftrightarrow a =$$
$$= (a + ab - ab) \Leftrightarrow a = a \Leftrightarrow a = 1 - (a - a)^2 = 1.$$

b) $$(a \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow a = (a(a+b-ab)) \Leftrightarrow a = \\ = (a+ab-ab) \Leftrightarrow a = a \Leftrightarrow a = 1.$$

Příklad 3

Rozhodněte o pravdivostní hodnotě formule:

a) $(A' \Rightarrow B') \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.

Řešení. Zapíšeme formule pomocí pravdivostních hodnot a postupně upravíme. Využijeme přitom vztah $a \Rightarrow b = 1 - ab'$.

a) Např.

$$(a' \Rightarrow b') \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1 - (a' \Rightarrow b')(b \Rightarrow a)' = \\ = 1 - (1 - a'b)(1 - ba')' = 1 - (1 - a'b)ba' = 1 - (ba' - a'b) = 1.$$

b) Např.

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1 - (a \Rightarrow b)(b \Rightarrow a)' = \\ = 1 - (1 - ab')(1 - ba')' = 1 - (1 - ab')ba' = 1 - ba'.$$

Formule (a) je tautologií. Formule (b) je splnitelná, např. pro $b = 0$ je pravdivá, pro $b = 1$, $a = 0$ nikoliv. Z výsledku $1 - ba'$ je dokonce vidět, že jde o implikaci $B \Rightarrow A$.

Příklad 4 (viz [1])

Zájemkyně o zájezd do Středomoří má velmi náročné a poněkud podivínské požadavky na výběr dopravních prostředků. Chtěla by letět letadlem nebo jet lodí, ale nechce použít obou dopravních prostředků. Navíc by chtěla jet lodí a přitom už necestovat vlakem nebo by si přála jet vlakem a přitom už neletět letadlem. Zoufalý úředník Čedoku jí nabídl dva zájezdy. V prvním byla pouze jízda lodí a vlakem, v druhém pouze let letadlem. Paní si vzala spokojeně druhý z nabídnutých zájezdů. Splňoval všechna její přání? Vyhovoval by první z nabídnutých zájezdů všem jejím požadavkům?

Řešení. Označme jednoduché výroky[2)], o nichž se mluví v textu úlohy, proměnnou takto: A – zájemkyně poletí letadlem, V – zájemkyně pojede

[2)] Výroky neobsahující souvislý jazykový výraz, který je výrokem (jednoduché výroky neobsahují výrokové spojky).

vlakem, L – zájemkyně pojede lodí. Předpokladem úsudku zoufalého úředníka je přání zájemkyně: $((A \vee L) \wedge (A \wedge L)') \wedge ((L \wedge V') \vee (V \wedge A'))$ – použije letadlo nebo loď (ne obojí) a navíc použije (loď a ne vlak) nebo (vlak a ne letadlo). Závěry úsudku jsou návrhy úředníka: $L \wedge V \wedge A'$ – pouze jízda lodí a vlakem, $A \wedge L' \wedge V'$ – pouze let.

Úsudek je logicky správný, právě když vždy, jsou-li pravdivé všechny předpoklady, je pravdivý i závěr. Zjistíme tedy, co plyne ze správnosti předpokladů, a porovnáme to se závěry. Počítáme:

$$\begin{gathered}((a \vee l) \wedge (a \wedge l)') \wedge ((l \wedge v') \vee (v \wedge a')) = \\ = ((a + l - la) \wedge (al)') \wedge ((lv') \vee (va')) = \\ = (a + l(1-a))(1-al) \cdot (lv' + va' - lv'va') = \\ = (a + la')(1-al) \cdot (lv' + va') = \\ = (a + la' - al)(lv' + va') = (a(1-l) + la')(lv' + va') = \\ = (al' + la')(lv' + va') = la'v' + la'v = la'(v' + v) = la'.\end{gathered}$$

Přání zákaznice je splněno, právě když $la' = 1$, tj. když $l = 1$, $a = 0$, na hodnotě v nezáleží (může být 1 nebo 0). Zákaznice měla zvolit jízdu lodí, případně ji spojit s jízdou vlakem. Přání zákaznice vystihovala jen úředníkova první nabídka.

Příklad 5 (viz [1])

Dívky tipují, jak bude vypadat na školu nastupující učitel tělocviku.

Věra: Snad bude vysoký a štíhlý nebo to bude brýlatý blonďák.

Hanka: Bude černooký a štíhlý nebo bude vysoký černooký.

Eva: Nebude brýlatý. Navíc si myslím, že nebude černooký a zároveň blonďák.

Učitel odpovídal tipu Věry a Evy, Hanka neuhodla. Jaký byl jeho vzhled?

Řešení. Nejprve zvolíme označení pro hodnoty jednoduchých výroků, vyskytujících se v textu: v – učitel tělocviku bude vysoký, s – bude štíhlý, c – bude černooký, b – bude brýlatý, l – bude blonďák.

Nyní symbolicky zapíšeme tipy dívek:

Věra: $(v \wedge s) \vee (b \wedge l)$

Hanka: $(c \wedge s) \vee (v \wedge c)$

Eva: $b' \wedge (c \wedge l)'$

Učitel odpovídal tipu Věry a Evy, Hanka neuhodla. Musíme rozhodnout, za jakých podmínek je konjunkce formulí přání dívek splnitelná.

Tedy

$$((v \wedge s) \vee (b \wedge l)) \wedge ((c \wedge s) \vee (v \wedge c))' \wedge (b' \wedge (c \wedge l)') =$$
$$= (vs \vee bl) \wedge (cs \vee vc)' \wedge b' \wedge (cl)' =$$
$$= (vs + bl - vsbl)(1 - cs - vc + vcs)b'(1 - cl) =$$

(prvního činitele $(vs + bl - vsbl)$ vynásobíme b' a dostaneme vsb')

$$= vsb'(1 - cs - vc(1 - s))(1 - cl) = vsb'(1 - cs - vcs')(1 - cl) =$$
$$= (vsb' - vcsb')(1 - cl) = vsb'c'(1 - cl) = vsb'c'.$$

Aby byl úsudek dívek správný, musí být učitel tělocviku vysoký, štíhlý, nesmí být černooký, brýlatý, na barvě jeho vlasů nezáleží.

Výpočet lze zjednodušit. Je zřejmé, že $b = 0$, jinak by Evin předpoklad nemohl být pravdivý. Nahradíme b ve formulích 0 a dostaneme

$$(v \wedge s) \wedge ((c \wedge s) \vee (v \wedge c))' \wedge (c \wedge l)' =$$
$$= vs(1 - cs - vc + vcs)(1 - cl) = vs(1 - cs - vcs')(1 - cl) =$$
$$= (vs - vcs)(1 - cl) = vsc'(1 - cl) = vsc'$$

se stejným výsledkem.

Příklad 6 (viz [2])

Pro které hodnoty x, y platí soustava logických ekvivalencí

$$((x \vee y') \wedge (x' \vee y)) \Leftrightarrow x,$$
$$(x \vee y) \Leftrightarrow x.$$

Řešení. Sice je výhodné použít tabulkovou metodu, my se ale opět přidržíme našeho postupu. Upravíme první formuli, např.

$$((x \vee y') \wedge (x' \vee y)) \Leftrightarrow x =$$
$$= ((1 - x'y)(1 - xy')) \Leftrightarrow x = (1 - x'y - xy') \Leftrightarrow x =$$
$$= 1 - (1 - x'y - xy' - x)^2 = 1 - ((1 - x) - x'y - xy')^2 =$$
$$= 1 - (x' - x'y - xy')^2 = 1 - (x'(1 - y) - xy')^2 =$$
$$= 1 - (x'y' - xy')^2 = 1 - (y'(x' - x))^2 = 1 - y'^2(x' - x)^2 = 1 - y' = y.$$

Druhá formule přejde na tvar

$$(x \vee y) \Leftrightarrow x = 1 - (x + y - xy - x)^2 = 1 - (yx')^2 = 1 - yx'.$$

Obě formule společně dají

$$y(1 - yx') = y - yx' = yx.$$

Daná soustava ekvivalencí je splněna, právě když $x = y = 1$. Lze ji tudíž nahradit konjunkcí $X \wedge Y$.

Příklad 7

Rozhodněte o pravdivosti formule $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

Řešení. Využitím vztahu $(a \Rightarrow b) = 1 - ab'$ vidíme, že platí:

$$\begin{gathered}
(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)) = \\
= (a \Rightarrow b) \Rightarrow (1 - (b \Rightarrow c)(a \Rightarrow c)') = \\
= (1 - ab') \Rightarrow (1 - (1 - bc')(1 - ac')') = \\
= (1 - ab') \Rightarrow (1 - (1 - bc')ac') = \\
= (1 - ab') \Rightarrow (1 - ac' + abc') = (1 - ab') \Rightarrow (1 - ac'(1 - b)) = \\
= (1 - ab') \Rightarrow (1 - ac'b') = 1 - (1 - ab')(1 - ac'b')' = \\
= 1 - (1 - ab')ac'b' = 1 - ac'b' + ac'b' = 1.
\end{gathered}$$

Daná formule je tedy tautologií.

Příklad 8

Rozhodněte, kteří žáci ze čtveřice A, B, C, D pojedou na výlet, pokud jsou dodrženy tyto zásady: Pojede aspoň jeden z dvojice B, D, nejvýše jeden z dvojice A, C, aspoň jeden z dvojice A, D a nejvýše jeden z dvojice B, C. Dále je jisto, že B nepojede bez A a že C pojede, pojede-li D.

Řešení. Tvrzením „aspoň jeden z dvojice“ rozumíme disjunkci. Situaci, kdy pojede „nejvýše jeden z dvojice“, tj. nepojedou oba současně, řeší negace konjunkce. Nejsme-li si jisti, jak slovní vyjádření zapsat symbolicky, pomůže tabulka.[3)] Např. „B nepojede bez A“:

B	A	?
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

[3)] Ke každé tabulce lze najít odpovídající složený výrok. Vezmeme řádky tabulky, kde je výsledný výrok pravdivý (resp. nepravdivý) a sestavíme disjunkci z konjunkcí pravdivých hodnot odpovídajících proměnných. Dostaneme tak hledaný výrok (resp. jeho negaci).

lze zapsat $(B \wedge A')'$. Musí tedy platit formule

$$(B \vee D) \wedge (A \wedge C)' \wedge (A \vee D) \wedge (B \wedge C)' \wedge (B \wedge A')' \wedge (D \Rightarrow C).$$

Počítáme:

$$\begin{gathered}(b + b'd)(1 - ac)(a + a'd)(1 - bc)(1 - ba')(1 - dc') = \\ = (b + b'd)(a - ac + a'd)(1 - bc - dc')(1 - ba') = \\ = (b + b'd)(ac' + a'd)(1 - bc - dc')(1 - ba') = \\ = (b + b'd)(1 - bc - dc')(ac' + a'd)(1 - ba') = \\ = (b + b'd - bc - bdc' - b'dc')(ac' + a'd - ba'd) = \\ = (b(1 - c) + b'd(1 - c') - bdc')(ac' + a'd(1 - b)) = \\ = (bc' + b'dc - bdc')(ac' + a'db') = \\ = abc' - abc'd + a'b'dc = abc'd' + a'b'cd\end{gathered}$$

Předpoklady platí, je-li $a = b = 1$ a $c = d = 0$, anebo $a = b = 0$ a $c = d = 1$. Řešením jsou tak dvě možnosti – výletu se zúčastní buď pouze dvojice A, B, nebo pouze dvojice C, D.

Příklad 9

Rozhodněte, zda uvedený úsudek je logicky správný:

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A \vee C \\ C \Rightarrow D \\ \neg(B \wedge D) \\ \hline B \Rightarrow A \end{array}$$

Řešení. Přepíšeme pomocí hodnot a počítáme:

$$\begin{gathered}(a \Rightarrow b) \wedge (a \vee c) \wedge (c \Rightarrow d) \wedge (b \wedge d)' = \\ = (1 - ab')(a + ca')(1 - cd')(1 - bd) = \\ = (a + ca' - ab')(1 - cd' - bd) = \\ = a + ca' - ab' - acd' - a'cd' + ab'cd' - abd - a'bcd = \\ = ab + a'cd - acd' + ab'cd' - abd - a'bcd = \\ = (a(1 - b') + c(1 - a))(1 - cd' - bd) = (ab + ca')(1 - cd' - bd) = \\ = ab - abd - abcd' + ca' - ca'd' - ca'bd = \\ = abd' - abcd' + ca'd - ca'bd = \\ = abd'(1 - c) + ca'd(1 - b) = abc'd' + a'b'cd.\end{gathered}$$

Již nyní vidíme, že buď je pravdivý první člen, anebo je pravdivý druhý člen. Formule je tedy pravdivá, právě když buď $a = b = 1$, $c = d = 0$, anebo $a = b = 0$, $c = d = 1$. V obou případech $B \Rightarrow A$ platí.

Výpočet ale můžeme dokončit. Úsudek je logicky správný, právě když

$$(abc'd' + a'b'cd) \Rightarrow (b \Rightarrow a)$$

je tautologie. Vypočteme:

$$\begin{gathered}(abc'd' + a'b'cd) \Rightarrow (1 - ba') = \\ = 1 - (abc'd' + a'b'cd)(1 - ba')' = 1 - (abc'd' + a'b'cd)ba' = 1,\end{gathered}$$

což bylo dokázat.

Příklad 10 (viz [1])

Katka si vybírá oblečení a módní doplňky, ze sedmi nabízených předmětů A, B, C, D, E, F, G si zamýšlí vybrat nejvýše čtyři. Její vlastní myšlenky, rady matky a rady prodavaček lze vyjádřit těmito výroky:

1) Vezme-li si Katka A, vezme si nutně E a G.
2) Nevezme-li si A, vezme si B.
3) C si vezme právě tehdy, když vezme D.
4) Vezme si F nebo G.
5) Vezme-li B a nevezme C, pak nevezme E a vezme F.
6) B a G si vezme právě tehdy, když si vezme C nebo F.

Nakonec si Katka odnáší jen předměty A, B. Které rady respektovala a které ne? Zjistěte, zda Katka mohla vyhovět všem radám vyjádřeným v textu úlohy. Kolika způsoby toho mohla dosáhnout ještě poté, kdy se rozhodla pro koupi předmětů A, B?

Řešení. Předpoklady úsudku lze zapsat postupně takto: $A \Rightarrow (E \wedge G)$, $A' \Rightarrow B$, $C \Leftrightarrow D$, $F \vee G$, $(B \wedge C') \Rightarrow (E' \wedge F)$, $(B \wedge G) \Leftrightarrow (C \vee F)$. Ty zapíšeme pomocí hodnot a upravíme:

1) $A \Rightarrow (E \wedge G)\colon a' + aeg$,
2) $A' \Rightarrow B\colon a + a'b$,
3) $C \Leftrightarrow D\colon 1 - cd' - c'd$,
4) $F \vee G\colon 1 - f'g'$,
5) $(B \wedge C') \Rightarrow (E' \wedge F)\colon 1 - bc' + bc'e'f$,
6) $(B \wedge G) \Leftrightarrow (C \vee F)\colon 1 - (1 - c'f' - bg)^2 = c'f' + bg - 2bgc'f'$.

Po vynásobení předpokladů 5) a 6) a po úpravě máme

$$\begin{aligned}(c'f' + bg - 2bgc'f')(1 - bc' + bc'e'f) = \\ = c'f' + bg - 2bc'f'g - bc'f' - bc'g + 2bc'f'g + bc'e'fg = \\ = (c'f' - bc'f') + (bg - bc'g) + bc'e'fg = b'c'f' + bgc + bc'e'fg.\end{aligned}$$

Postupujme dále, z předpokladů 5), 6) a 4) plyne

$$\begin{aligned}(b'c'f' + bgc + bc'e'fg)(1 - f'g') = b'c'f' + bgc + bc'e'fg - b'c'f'g' = \\ = b'c'f(1 - g') + bgc + bc'e'fg = bcg + b'c'f'g + bc'e'fg\end{aligned}$$

a z předpokladů 4), 5), 6) a 3) dostáváme

$$\begin{aligned}(bcg + b'c'f'g + bc'e'fg)(1 - cd' - c'd) = \\ = bcg + b'c'f'g + bc'e'fg - bcd'g - b'c'df'g - bc'de'fg = \\ = (bcg - bcd'g) + (bc'e'fg - bc'de'fg) + (b'c'f'g - b'c'df'g) = \\ = bcdg + bc'd'e'fg + b'c'd'f'g.\end{aligned}$$

Z předpokladů 1) a 2) plyne

$$(a' + aeg)(a + a'b) = aeg + a'b.$$

Všechny předpoklady společně vedou k závěru

$$\begin{aligned}(bcdg + bc'd'e'fg + b'c'd'f'g)(a'b + aeg) = \\ = a'bcdg + a'bc'd'e'fg + abcdeg + ab'c'd'ef'g.\end{aligned}$$

Jestliže si Katka koupí jen předměty A a B, splní všechny předpoklady, jen když současně koupí i C, D, E a G. Je-li totiž $a = b = 1$, bude závěrem jen člen $abcdeg$ a hodnoty všech v něm obsažených proměnných musí být 1, což ale vzhledem k podmínce koupě nejvýše čtyř předmětů není možné.

Koupí-li Katka jen předměty A a B, pak jsou splněny pouze předpoklady 2), 3) a 6), jak se lze dosazením $a = b = 1$, $c = d = e = f = g = 0$ do nich přesvědčit.

Koupí-li Katka jen A, nebo jen B, pak buď $a = 1$, $b = 0$, anebo $a = 0$, $b = 1$.

Jestliže $a = 1$, $b = 0$, potom je závěrem $ab'c'd'ef'g$. Musí tedy platit $ab'c'd'ef'g = 1$, a to znamená $e = g = 1$, $c = d = f = 0$, tj. Katka koupí předměty A, E a G.

Je-li $a = 0$, $b = 1$ potom je závěrem $cdg + c'd'e'fg$. Buď je $cdg = 1$, anebo $c'd'e'fg = 1$, obojí zároveň nastat nemůže.

Je-li $cdg = 1$, potom $c = d = g = 1$, $e, f \in \{0, 1\}$, tj. Katka musí koupit čtyři předměty B, C, D, G. Předpoklady by splnila i kdyby navíc koupila předměty E a F, tomu však brání podmínka koupě nejvýše čtyř předmětů, víc koupit nemůže.

Je-li $c'd'e'fg = 1$, musí být $f = g = 1$, $c = d = e = 0$, tj. Katka by měla koupit předměty B, F a G.

Nekoupí-li Katka ani A, ani B, tj. $a = b = 0$, pak je závěrem 0, všechny předpoklady nelze nikdy splnit. Např. výběrem jakékoliv kombinace ze zbývajících předmětů C, D, E, F, G nemůže Katka nikdy splnit druhý předpoklad.

Poznámka. Jsou i jiné způsoby, jak logické spojky numericky vyjádřit, např.

$$a \vee b = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a + b = 0, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} \qquad a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a + b = 2, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } a \le b, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \qquad a \Leftrightarrow b = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } a + b = 1, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Často se logické spojky charakterizují takto: $a' = 1 - a$, $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$.

Literatura

[1] *J. Šedivý, J. Lukátšová, O. Odvárko, M. Zöldy*: Úlohy o výrocích a množinách pro I. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1972.

[2] *O. Odvárko*: Booleova algebra. Škola mladých matematiků 31, ÚV MO v nakl. Mladá fronta, Praha, 1973.

[3] *P. Jirků, J. Vejnarová*: Logika. Neformální výklad základů formální logiky. VŠE (Oeconomica), Praha, 2007.

[4] *J. Raclavský*: Úvod do logiky: klasická výroková logika. Masarykova univerzita, Brno, 2015.

[5] *M. Závodný*: Úvod do matematiky. Vydavatelství UP, Olomouc, 2013.