

Tři speciální body ležící na jedné přímce VI

JAROSLAV ZHOUF

FIT ČVUT, Praha

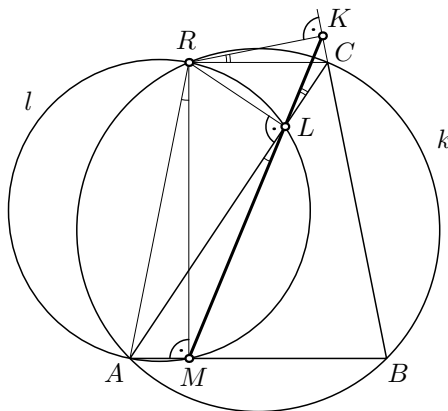
V tomto článku se vracíme k tématu, kterým se zabývalo předchozích pět článků. Je to téma o zajímavých trojicích bodů, které leží na jedné přímce. Takových trojic bodů je velké množství, zde ale prezentujeme hlavně trojice, které je možné využít ve školní výuce. Jednou takovou trojicí je ta, která se vztahuje k tzv. Simsonově přímce.

Některé úlohy jsou formulovány tak, abychom dokazovali, že tři body leží na téže přímce. Ekvivalentně lze dokázat, že určité tři přímky procházejí společným bodem. Objasnění této ekvivalence je konkrétně uvedeno v zadání příkladů 2, 3, 4.

Ukázky dalších trojic bodů ležících na jedné přímce

Příklad 1 (Simsonova přímka)

Je dán trojúhelník ABC a bod R na kružnici k opsané tomuto trojúhelníku. Označme K , L , M po řadě paty kolmic vedených bodem R k přímkám BC , CA , AB . Dokažte, že body K , L , M leží na jedné, tzv. Simsonově přímce.



Obr. 1

Řešení. Je-li bod R totožný s některým z vrcholů trojúhelníku ABC , jsou dva z bodů K, L, M totožné a tvrzení úlohy evidentně platí.

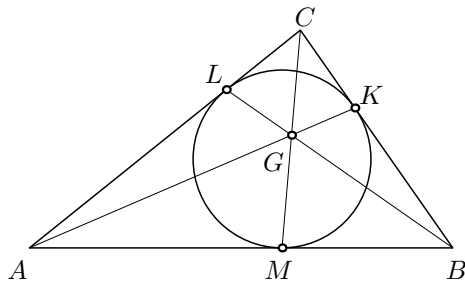
Je-li některý z bodů K, L, M totožný s některým z vrcholů trojúhelníku ABC , analogicky tvrzení úlohy evidentně platí, protože bod R tvoří s některým z vrcholů trojúhelníku ABC průměr kružnice opsané.

Uvažujme nyní ostatní případy (obr. 1). Kružnice l nad průměrem AR prochází podle Thaletovy věty body L, M . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu $|\sphericalangle ALM| = |\sphericalangle ARM|$. Podobně se dokáže rovnost $|\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle KRC|$. Jelikož R leží na kružnici k , je $|\sphericalangle RAB| + |\sphericalangle RCB| = 180^\circ$. Proto je $|\sphericalangle RAM| = |\sphericalangle RCK|$, a tak pravoúhlé trojúhelníky RAM a RCK jsou podobné. Pak tedy $|\sphericalangle ARM| = |\sphericalangle CRK|$ a $|\sphericalangle ALM| = |\sphericalangle KLC|$. To znamená, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Příklad 2 (Gergonnův bod)

Je dán trojúhelník ABC . Kružnice mu vepsaná se dotýká strany BC v bodě K , strany AC v bodě L a strany AB v bodě M . Průsečík přímek AK, BL označme G . Dokažte, že body C, G, M leží na jedné přímce, neboli že se přímky AK, BL, CM protínají v jednom bodě označeném G a nazývaném Gergonnův bod.

Řešení. K důkazu využijeme Menelaovu větu, kterou jsme si uvedli ve verzi II tematiky o třech bodech ležících na jedné přímce. Využijeme rovností $|AM| = |AL|$, $|BM| = |BK|$, $|CK| = |CL|$ (obr. 2).



Obr. 2

Jako předpoklad si napíšeme Menelaovu větu pro trojúhelník BCL a přímku AK . Platí

$$\frac{|BG|}{|LG|} \cdot \frac{|CK|}{|BK|} \cdot \frac{|LA|}{|CA|} = 1, \quad \text{neboli} \quad \frac{|BG|}{|LG|} = \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CA|}{|LA|}.$$

Nyní napíšeme Menelaovu větu pro trojúhelník BLA a přímku CM , do níž dosadíme výše uvedené předpoklady a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{|BG|}{|LG|} \cdot \frac{|LC|}{|AC|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} &= \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CA|}{|LA|} \cdot \frac{|LC|}{|AC|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = \\ &= \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CA|}{|LA|} \cdot \frac{|KC|}{|AC|} \cdot \frac{|AL|}{|BK|} = 1. \end{aligned}$$

Tím je naplněno znění Menelaovy věty, což znamená, že body C , G , M leží na jedné přímce.

Příklad 3 (Nagelův bod)

Je dán trojúhelník ABC . Kružnice mu vně připsané se dotýkají postupně strany BC v bodě K , strany AC v bodě L a strany AB v bodě M . Průsečík přímk AK , BL označme N . Dokažte, že body C , N , M leží na jedné přímce, neboli že se přímky AK , BL , CM protínají v jednom bodě označeném N a nazývaném Nagelův bod.

Řešení. Důkaz tohoto tvrzení provedeme pro změnu pomocí Cèvovy věty, která byla uvedena též ve verzi II tematiky o třech bodech ležících na jedné přímce.

Vydeme z obr. 3. Na něm je znázorněn trojúhelník ABC , středy S , I , O kružnic vně připsaných tomuto trojúhelníku, body dotyku K , L , M těchto kružnic se stranami trojúhelníku ABC . Dále jsou zde znázorněny další body dotyku P , Q , R , T , U , V kružnic vně připsaných s přímkami AB , BC , CA .

Kružnice se středem S je vepsána úhlu PCQ , proto je $|PC| = |QC|$. Tato kružnice je též vepsána úhlu PAM , proto je $|PA| = |AM|$. Analogicky je $|QB| = |MB|$. Celkově tedy

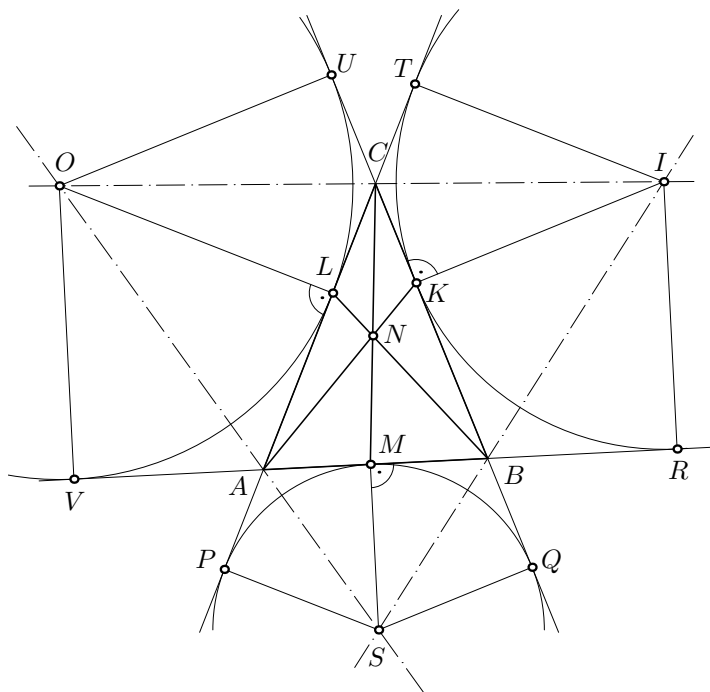
$$|PC| = |QC| = |RA| = |TA| = |UB| = |VB| = s,$$

kde s je polovina obvodu trojúhelníku ABC .

Nyní použijeme Cèvovu větu pro trojúhelník ABC a přímky AK , BL , CM . Platí

$$\frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} \cdot \frac{|AM|}{|BM|} = \frac{s - |AB|}{s - |AC|} \cdot \frac{s - |BC|}{s - |AB|} \cdot \frac{s - |AC|}{s - |BC|} = 1.$$

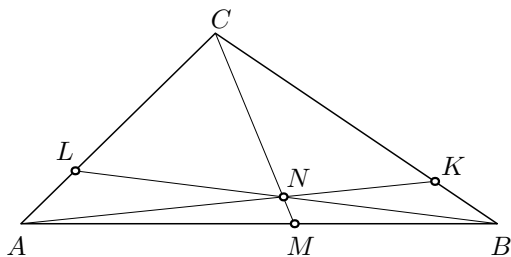
Tím je naplněno znění Cèvovy věty, což znamená, že se úsečky AK , BL , CM protínají v jednom bodě, což znamená, že body C , N , M leží na jedné přímce.



Obr. 3

Příklad 4

Je dán trojúhelník ABC a na jeho stranách body K, L, M podle obr. 4 takové, že přímky AK, BL a CM dělí obvod trojúhelníku na polovinu. Protínají-li se přímky AK a BL v bodě N , dokažte, že body C, N, M leží na jedné přímce, neboli že se přímky AK, BL a CM protínají v jednom bodě N .

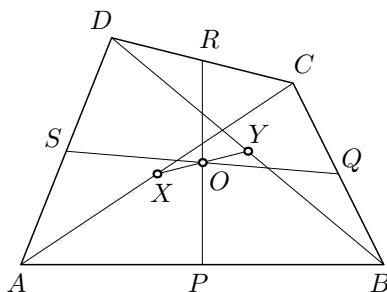


Obr. 4

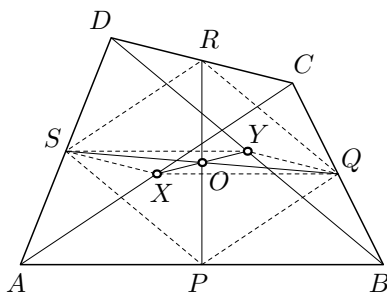
Řešení. Tvzení je dokázáno v předchozím příkladu 3, neboť body K, L, M jsou vlastně body dotyku vně připsaných kružnic trojúhelníku ABC .

Příklad 5

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, který není ani pravoúhelník, ani kosoúhelník. Body P, Q, R, S jsou středy jeho stran, jak ukazuje obr. 5. Body X a Y jsou středy úhlopříček AC, BD , bod O je průsečík úseček PR a QS . Dokažte, že bod O leží na úsečce XY .



Obr. 5



Obr. 6

Řešení. Sledujme obr. 6. Body S, P jsou středy stran trojúhelníku ABD , proto jsou přímky SP a DB rovnoběžné. Analogicky je s těmito přímkami rovnoběžná i přímka RQ . Analogicky jsou rovnoběžné přímky AC, PQ, SR . Takže $SPQR$ je rovnoběžník a jeho úhlopříčky se protínají v bodě O .

Dále jsou body S, X středy stran trojúhelníku ACD , proto jsou přímky SX a DC rovnoběžné. Analogicky je s těmito přímkami rovnoběžná i přímka YQ . Stejně tak jsou rovnoběžné přímky AB, XQ, SY . Takže $XQYS$ je rovnoběžník a jeho úhlopříčky se protínají také v bodě O .

To znamená, že bod O je středem úsečky XY , takže bod O leží na úsečce XY .

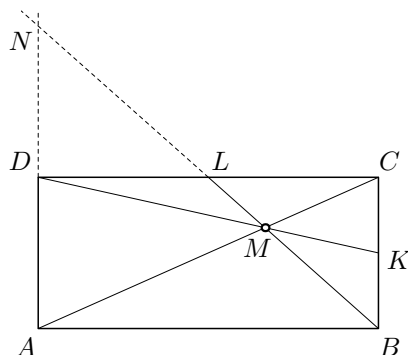
Poznámka. Rovnoběžník $PQRS$, jehož vrcholy jsou středy daného čtyřúhelníku $ABCD$, se nazývá *Varignonův rovnoběžník*.

Příklad 6

V obdélníku $ABCD$ je K střed strany BC a L střed strany CD . Úsečky DK, BL se protínají v bodě M . Dokažte, že M leží na úhlopříčce AC obdélníku.

Řešení. Dokážeme ekvivalentní tvrzení: Protínají-li se úsečky AC a BL v bodě M , prochází také úsečka DK bodem M .

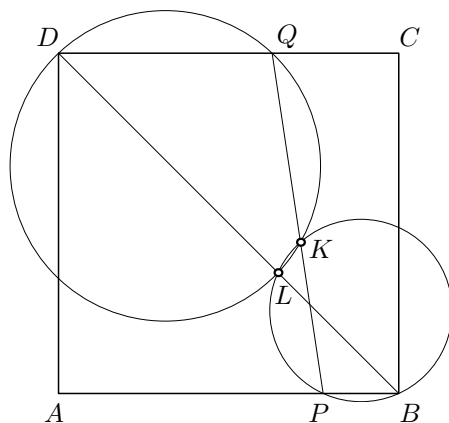
Označme N průsečík přímek AD , BL (obr. 7). Trojúhelníky ANM , CBM jsou stejnohlé se středem M , proto střed D úsečky AN a střed K úsečky BC jsou krajní body úsečky, na níž leží bod M .



Obr. 7

Příklad 7

Bod K je libovolný bod uvnitř čtverce $ABCD$ a PQ je libovolná úsečka procházející bodem K a koncové body má uvnitř stran AB a CD (obr. 8). Kružnice opsaná trojúhelníku KQD a kružnice opsaná trojúhelníku KPB se protínají ještě v bodě L . Dokažte, že L leží na úhlopříčce BD čtverce.



Obr. 8

Řešení. Díky rovnoběžnosti přímk AB , CD platí $|\sphericalangle KPB| = |\sphericalangle KQD|$. Pro obvodové úhly nad tětivou DK platí $|\sphericalangle KQD| = 180^\circ - |\sphericalangle KLD|$. Pro obvodové úhly nad tětivou KB platí $|\sphericalangle KPB| = |\sphericalangle KLB|$. Čtyřúhelník $PBKL$ je tětivový, proto platí

$$|\sphericalangle KLB| = |\sphericalangle KPB| = |\sphericalangle KQD| = 180^\circ - |\sphericalangle KLD|,$$

odkud plyne rovnost $|\sphericalangle KLB| + |\sphericalangle KLD| = 180^\circ$, což znamená, že bod L leží na úhlopříčce BD .

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Je dán trojúhelník ABC a bod R na kružnici opsané tomuto trojúhelníku. Označme R_1 , R_2 , R_3 body souměrně sdružené k bodu R podle stran trojúhelníku ABC . Dokažte, že body R_1 , R_2 , R_3 leží v přímce.

Úloha 2

Osa vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC protne kružnici k mu opsanou po řadě v bodech $U \neq C$, $V \neq C$. Je-li S střed strany AB , dokažte, že body U , S , V leží v přímce, která je navíc kolmá na stranu AB .

Úloha 3

Nad stranami AC , BC trojúhelníku ABC jsou sestrojeny Thaletovy kružnice, které se protínají ve dvou bodech. Jedním je bod C , druhý označme X . Dokažte, že bod X leží na přímce AB .

Úloha 4

Uvnitř úsečky AB je zvolen libovolný bod C . Nad úsečkami AB , AC , CB jsou sestrojeny půlkružnice do stejné poloroviny omezené přímkou AB . Rovinný útvar omezený těmito třemi půlkružnicemi se nazývá *arbelos*. V bodě C je sestrojena kolmice, která protne největší půlkružnici v bodě M . Nad průměrem CM je sestrojena kružnice, která protne menší půlkružnice v bodech K , L . Střed úsečky KL označíme S . Dokažte, že body C , S , M leží na jedné přímce.

Úloha 5

Trojúhelníku ACD je opsána kružnice d a na straně AC je zvolen bod B . Do kružnice d jsou vepsány dvě kružnice, kružnice k má s kružnicí d bod dotyku A a prochází bodem B , kružnice l má s kružnicí d bod dotyku C a prochází bodem B . Úsečka AD protíná kružnici k v bodě K a úsečka CD

protíná kružnici l v bodě L . Střed úsečky KL označíme M . Dokažte, že bod M leží na úsečce BD .

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Využijeme stejnolehlost se středem R na Simsonovu přímku.

Úloha 2: Úhel UCV je pravý, přímka UV tedy prochází středem kružnice k . Osa vnitřního úhlu protíná oblouk AB v jeho středu. Přímka UV je tudíž osou strany AB .

Úloha 3: Platí $|\sphericalangle AXC| + |\sphericalangle BXC| = 90^\circ + 90^\circ$.

Úloha 4: Úhly AMB , AKC , CLB jsou pravé, proto je $KCLM$ pravoúhelník.

Úloha 5: Stejnolehlost se středem A zobrazí kružnici d na kružnici k , stejnolehlost se středem C zobrazí kružnici d na kružnici l . Vidíme, že $BLDK$ je rovnoběžník.

Závěr

Tento článek je ukončením tematiky o třech bodech ležících na jedné přímce. K této problematice byla uvedena teorie, a to hlavně Menelaova a Cèvova věta, a také 61 úloh, z nichž některé byly vyřešeny v textu a ostatní byly ponechány k vyřešení čtenářům.

Tato problematika vybízí k tomu, aby byla rozšířena. Předpokládáme tedy, že by mohly následovat články o čtyřech zajímavých bodech, které leží na jedné přímce.

Literatura

- [1] Boček, L., Zhouf, J.: Planimetrie, 2. rozšířené vydání. PedF UK, Praha, 2012.
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, Washington D.C., 1967.
- [3] Honsberger, R.: Mathematical Chestnuts from Around the World. The Mathematical Association of America, 2001, s. 115–119.
- [4] Švrček, J.: Archimédův arbelos. In: Hofmanová, P., Zhouf, J. (eds.), Makos 2004. UJEP, Ústí nad Labem, 2005, s. 55–59.