

Zajímavé matematické úlohy

V novém ročníku našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 9. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 301

Určete všechny možné hodnoty zlomku

$$\frac{x + 33y}{33x + y}$$

pro nezáporná reálná čísla x, y , která nejsou současně rovna nule?

Ján Mazák

Úloha 302

Na počátku stálo zboží ve dvou prodejnách stejnou částku A . Několikrát si tyto dvě prodejny konkurovaly následujícím způsobem. Pokud jedna prodejna změnila cenu zboží o p procent, $p \in \mathbb{Z}$, $0 < |p| < 100$, druhá prodejna vzápětí cenu změnila o stejný počet procent opačným směrem (např. pokud jedna prodejna cenu zvýšila o 3 %, druhá ji o 3 % snížila a naopak). Po k takových změnách se ukázalo, že zboží v obou prodejnách stojí opět stejně. Určete nejvyšší možnou výslednou cenu toho zboží. Úlohu řešte pro a) $k = 4$, b) $k = 3$.

Jaroslav Zhouf, Pavel Calábek

V následující části uvádíme řešení úloh 297 a 298, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 297

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)^2} < 1.$$

Pavel Calábek

Řešení. Pro libovolné přirozené číslo n platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)^2} &= \frac{(n+1)-n}{n^2(n+1)} + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)^2} = \\ &= \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Platí tak

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)^2} = \\ = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

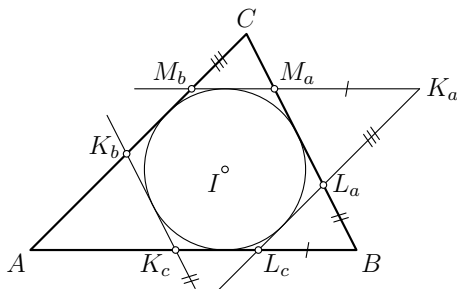
Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Lubomír Hajdanka* z Michalovců, *Jakub Cyl*, *Bartosz Depta*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman*, *Piotr Szatan* a *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně a *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Úloha 298

Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice o poloměru ϱ . Její tečny rovnoběžné po řadě se stranami a , b , c trojúhelníku z něj vytínají tři menší trojúhelníky, jejichž kružnice vepsané mají poloměry ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c . Dokažte, že platí $\varrho = \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c$. *Josef Polák*

Řešení. Označme K_c , K_b průsečíky tečny kružnice vepsané trojúhelníku ABC rovnoběžné se stranou BC po řadě se stranami AC , AB . Podobně označme L_a , L_b , M_a , M_c průsečíky zbylých dvou tečen s odpovídajícími stranami podle obrázku. Průsečík přímek $L_a L_c$ a $M_a M_b$ označíme K_a .



Tečny AB a M_aM_b kružnice vepsané trojúhelníku ABC jsou souměrně sdružené podle jejího středu I . Podobně jsou souměrně sdružené podle I i tečny BC a K_cK_b resp. CA a L_cL_a . Odtud plyne, že trojúhelníky AK_cK_b a $K_aM_aL_a$ s vrcholy v průsečících těchto tečen jsou souměrně sdružené podle bodu I , tedy shodné.

Z rovnoběžnosti stran trojúhelníků AK_cK_b a ABC plyne, že jsou podobné s koeficientem $|K_cK_b|/|BC|$, s tímto koeficientem jsou tedy podobné i poloměry ϱ_a a ϱ kružnic jim vepsaných. Z výše uvedené shodnosti trojúhelníků AK_cK_b a $K_aM_aL_a$ tak dále plyne

$$\frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{|K_cK_b|}{|BC|} = \frac{|L_aM_a|}{|BC|}.$$

Z rovnoběžnosti stran trojúhelníků L_cBL_a a ABC plyne, že jsou podobné s koeficientem $|BL_a|/|BC|$, tedy s tímto koeficientem jsou podobné i poloměry ϱ_b a ϱ kružnic jim vepsaných, platí tak

$$\frac{\varrho_b}{\varrho} = \frac{|BL_a|}{|BC|}.$$

Podobně pro poloměry ϱ_c a ϱ kružnic vepsaných trojúhelníkům M_bM_aC a ABC platí

$$\frac{\varrho_c}{\varrho} = \frac{|M_aC|}{|BC|}.$$

Odtud již dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_a}{\varrho} + \frac{\varrho_b}{\varrho} + \frac{\varrho_c}{\varrho} &= \frac{|L_aM_a|}{|BC|} + \frac{|BL_a|}{|BC|} + \frac{|M_aC|}{|BC|} = \\ &= \frac{|BL_a| + |L_aM_a| + |M_aC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BC|} = 1, \end{aligned}$$

jehož důsledkem je požadovaná rovnost

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = \varrho.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Jakub Cyl*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman* a *Piotr Szatan*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Pavel Calábek