

Ústřední kolo 74. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 74. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádala ve dnech 16.–19. března 2025 Krajská komise Matematické olympiády a Pobočný spolek Jednoty českých matematiků a fyziků v Plzni ve spolupráci se Západočeskou univerzitou v Plzni a s přispěním řady partnerů a sponzorů. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise Matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Všichni soutěžící, členové Ústřední komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu *Trend* v centru Plzně, celá soutěž včetně slavnostního zahájení proběhla prostorách Západočeské univerzity. Slavnostní vyhlášení se pak konalo v historické plzeňské radnici. O zdárný průběh soutěže se velkou měrou zasloužila hlavní organizátorka soutěže *PaedDr. Naděžda Kubešová*, předsedkyně Krajské komise Matematické olympiády.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 50 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 6 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny – 17. a 18. března, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku

města. Druhý den to pak byla návštěva Techmanie Science Center a představení s názvem „ $1 + 1 = 3$ “ v divadle Pluto.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům IV. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 19. března dopoledne. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Dle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno dvanáct vítězů ústředního kola, absolutním vítězem se pak stal *Jakub Trčka* z G Jana Keplera v Praze 6 se ziskem 40 bodů. Dále bylo oceněno dvanáct úspěšných řešitelů. Podrobnější [výsledky](#) najdete na stránkách [74. ročníku MO](#). Zde najdete také [vzorová řešení](#) soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (17. března)

1. Pro reálná čísla a, b, c, d platí

$$a + b + c + d = 0$$

a

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0.$$

Kolik z rovností

$$ab = cd, \quad ac = bd, \quad ad = bc$$

může současně platit? Určete všechny takové počty. (*Michal Janík*)

2. Najděte největší celé číslo n s následující vlastností: Kdykoliv je v rovině dáno pět navzájem různých bodů tak, že některé dva z nich leží uvnitř trojúhelníku tvořeného zbylými třemi body,

pak lze některé tři z těchto pěti bodů označit X, Y, Z tak, že platí

$$n^\circ < |\angle XYZ| \leq 180^\circ.$$

(Josef Tkadlec)

3. Necht $n > 1$ je přirozené číslo a p jeho největší prvočinitel. Pro každou neprázdnou podmnožinu dělitelů čísla n napíšeme na tabuli součet jejich prvků. Předpokládejme, že jsme takto napsali více než p čísel z množiny $\{1, 2, \dots, p+2\}$ a žádné číslo z této množiny jsme nenapsali vícekrát. Dokažte, že pak jsme žádné číslo nenapsali vícekrát.

(Zdeněk Pezlar)

2. soutěžní den (18. března)

4. Podél kružnice je napsáno několik (alespoň tři) navzájem různých prvočísel. Pro každá dvě sousední prvočísla určíme největší prvočinitel jejich součtu. Takto získáme až na pořadí opět stejná prvočísla, jako byla ta napsaná. Najděte všechny možné výchozí množiny prvočísel. (Např. prvočísla 2, 7, 3, 11, 17 v tomto pořadí nevyhovují, protože odpovídající součty 9, 10, 14, 28, 19 mají největší prvočinitele 3, 5, 7, 7, 19.)

(Michal Janík)

5. Najděte všechna kladná celá čísla n s následující vlastností: Ve čtvercové tabulce $n \times n$ lze vybarvit $2n$ polí tak, že žádná dvě z nich nesousedí stranou ani vrcholem a v každém řádku i každém sloupci jsou vybarvená právě dvě pole.

(Jakub Štepo)

6. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík výšek, ω kružnici opsanou a O její střed. Dále

označme M střed strany BC a $D \neq A$ průsečík přímky AH s kružnicí ω . Přímka DM protne kružnici ω v bodě $E \neq D$. Necht $F \neq E$ je průsečík přímky AE s kružnicí opsanou trojúhelníku OME . Dokažte, že platí $|FH| = |FA|$.

(Michal Pecho)

Všichni vítězové a nejlepší úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu v Austrálii a Středoevropskou matematickou olympiádu v Německu. Nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozvání na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek

Ústřední kolo 74. ročníku MO kategorie P

Letošní 74. ročník Matematické olympiády vyvrcholil ústředními koly kategorií A a P, která se konala v polovině března v Plzni. Ústřední kolo MO-P jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo MO-A, takže někteří studenti mohli absolvovat obě soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Takových studentů bylo letos deset, tedy více než třetina soutěžících v kategorii P.

Ústřední kolo Matematické olympiády organizačně výborně připravili pracovníci Krajské komise MO v Plzni ve spolupráci se Západočeskou univerzitou v Plzni a s přispěním celé řady partnerů a sponzorů. Všichni účastníci byli ubytováni v hotelu Trend v centru Plzně, celá soutěž probíhala v pro-