

Stereometrická analogie úlohy o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

V MFI roč. 33 (2024), č. 4 byla v rubrice Zajímavé matematické úlohy předložena čtenářům k řešení planimetrická úloha (pod číslem 298, zde úloha 1) o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku. Neméně zajímavá je též stereometrická analogie této planimetrické úlohy pro trojúhelník. V tomto článku ukážeme, jak lze tuto stereometrickou úlohu pro čtyřtětň zformulovat a řešit užitím heuristické strategie analogie.

1. Heuristické strategie, princip strategie analogie

Heuristickými (objevitelskými) strategiemi se rozumí empirické (zkušební, pokusné, zkusmé) postupy a metodické návody pro řešení nestandardních matematických úloh (problémů). Založeny jsou na *heuristice*, jíž se rozumí umění (či nauka) jak objevovat (nalézat nové). Její název má původ v řeckém slově *heuréka* = „objevil jsem, našel jsem“ (tradičně připisovanému radostnému zvolání starořeckého učenice Archimeda). Počátky *klasické heuristiky* ve starověkém Řecku i celý její další historický vývoj jsou bezprostředně spojeny se vznikem a rozvojem matematiky i dalších věd. Za zakladatele *moderní heuristiky* je považován maďarský matematik (působící v USA) *George Pólya* (1887–1985). Svými četnými pracemi, zejména knižními publikacemi se zasloužil nejen o moderní pojetí a rozvoj heuristických metod, ale také o jejich popularizaci a rozšíření v akademických a vědeckých kruzích.

Jednou z nejvýznamnějších heuristických strategií podle Pólyi je *strategie analogie* (*strategie založená na analogii*), která spočívá v tom, že při formulaci a řešení náročné matematické úlohy se nejprve zformuluje a řeší vhodná jednodušší úloha a tím se získává inspirace i návod pro formulaci a řešení náročnější analogické úlohy. Velmi významným speciálním případem tohoto postupu je přechod od formulace a řešení planimetrické úlohy (pro geometrické objekty v rovině) k analogické stereometrické úloze (pro analogické objekty v prostoru).

2. Trojúhelník a čtyřstěn jako analogické matematické objekty

Dva matematické objekty jsou analogické, jestliže mají některé vlastnosti shodné nebo v jistém smyslu podobné. Typickými příklady jsou dvojice *analogických planimetrických a stereometrických útvarů*. V našem článku půjde o dvojice *trojúhelník a čtyřstěn*, jejichž četné vlastnosti jsou podobné (analogické). Trojúhelník je mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů i stran. Čtyřstěn je mnohostěn s nejmenším počtem vrcholů i stěn. Z mnoha analogických vět pro trojúhelníky a čtyřstěny využijeme v našem článku zejména dvě následující existenční věty.

Věta 1 (o existenci kružnice vepsané trojúhelníku)

V každém trojúhelníku osy vnitřních úhlů se protínají právě v jednom bodu S_v a jeho vzdálenosti od všech tří přímek, v nichž leží strany trojúhelníku, jsou stejné; značíme je ρ . V trojúhelníku tak existuje právě jedna kružnice se středem S_v a poloměrem ρ , která se dotýká všech tří stran trojúhelníku; nazývá se *kružnice vepsaná trojúhelníku*.

Věta 2 (stereometrická analogie věty 1 o existenci kulové plochy vepsané čtyřstěnu) [2, 3]

V každém čtyřstěnu existuje právě jeden bod S_v , jehož vzdálenost od všech čtyř rovin stěn čtyřstěnu, jsou stejné; značíme je ρ . Ve čtyřstěnu tak existuje právě jedna kulová plocha se středem S_v a poloměrem ρ , která se dotýká všech čtyř stěn čtyřstěnu; nazývá se *kulová plocha vepsaná čtyřstěnu*.

3. Formulace výchozí planimetrické úlohy pro trojúhelník

Vyjdeme z takové formulace této úlohy, jež je vhodná pro zformulování a řešení analogické stereometrické úlohy pro čtyřstěn.

Úloha 1 (planimetrická úloha o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku)

Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice o poloměru ρ . Její tečny t_1 , t_2 , t_3 rovnoběžné po řadě se stranami trojúhelníku BC , AC , AB z něj vytínají

tři menší trojúhelníky AB_1C_1 , BA_2C_2 , CA_3B_3 , jejichž kružnice vepsané mají poloměry ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 . Dokažte, že platí

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \rho.$$

4. Formulace a řešení analogické úlohy pro čtyřstěn

Na základě analogických vlastností čtyřstěnu s vlastnostmi trojúhelníku a uvedených analogických vět 1 a 2 dospíváme k následující formulaci stereometrické úlohy 2 pro čtyřstěn, jež je analogická k planimetrické úloze 1 pro trojúhelník.

Úloha 2 (stereometrická úloha pro čtyřstěn analogická k planimetrické úloze 1 pro trojúhelník)

Čtyřstěnu $ABCD$ je vepsaná kulová plocha o poloměru ρ . Její tečné roviny τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 rovnoběžné po řadě s rovinami stěn čtyřstěnu BCD , ACD , ABD , ABC z něj vytínají 4 menší čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$, jejichž kulové plochy vepsané mají poloměry ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 . Dokažte, že platí

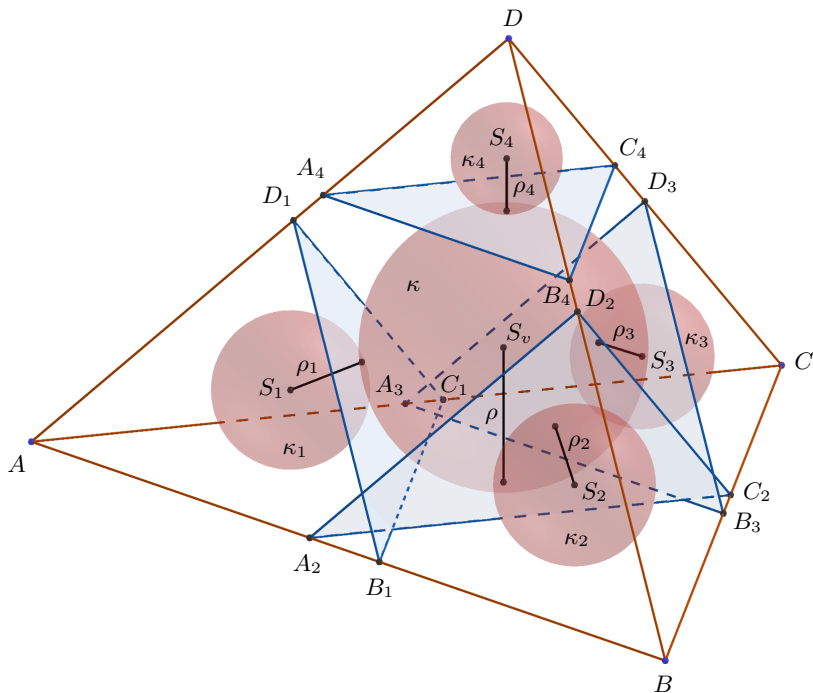
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2\rho.$$

Řešení úlohy 2. Použijeme v něm tato označení (obr. 1): Pro tělesové výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedené po řadě jeho vrcholy A , B , C , D kolmo k protilehlým stěnám označíme jejich délky v_a , v_b , v_c , v_d . Kulovou plochu o poloměru ρ vepsanou tomuto čtyřstěnu označíme κ a její střed S_ρ . Pro čtyři menší čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$ tělesové výšky vedené po řadě vrcholy A , B , C , D kolmo k protilehlým stěnám označíme jejich délky v_1 , v_2 , v_3 , v_4 . Kulové plochy o poloměrech ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 vepsané těmto čtyřstěnům označíme po řadě κ_1 , κ_2 , κ_3 , κ_4 a jejich středy S_1 , S_2 , S_3 , S_4 .

Z vlastností kulové plochy κ vepsané čtyřstěnu $ABCD$ (viz věta 2) plyne, že vzdálenosti tečných rovin τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 od protilehlých stěn čtyřstěnu jsou rovny 2ρ . Pro velikosti výšek v_a , v_b , v_c , v_d a v_1 , v_2 , v_3 , v_4 proto platí

$$v_1 = v_a - 2\rho, \quad v_2 = v_b - 2\rho, \quad v_3 = v_c - 2\rho, \quad v_4 = v_d - 2\rho.$$

Čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$ jsou stejnohlé, a tedy podobné útvaru s čtyřstěnem $ABCD$ ve stejnohlelostech (podobnostech) se středy A , B , C , D a koeficienty podobnosti (kladnými koeficienty



Obr. 1

stejnolehlosti) danými vztahy

$$k_1 = \frac{v_1}{v_a} = 1 - \frac{2\rho}{v_a}, \quad k_2 = \frac{v_2}{v_b} = 1 - \frac{2\rho}{v_b},$$

$$k_3 = \frac{v_3}{v_c} = 1 - \frac{2\rho}{v_c}, \quad k_4 = \frac{v_4}{v_d} = 1 - \frac{2\rho}{v_d}.$$

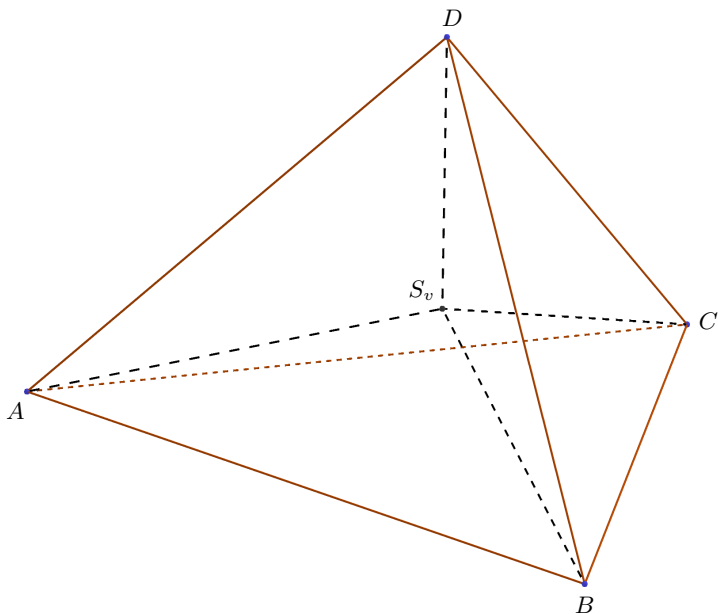
Speciálně pro $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ a ρ platí

$$\rho_1 = k_1\rho, \quad \rho_2 = k_2\rho, \quad \rho_3 = k_3\rho, \quad \rho_4 = k_4\rho.$$

Sečtením těchto tří rovností dostáváme

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\rho. \quad (1)$$

Součet koeficientů podobnosti $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ v této rovnosti lze určit tak, že všechny koeficienty se upraví na jednotný tvar vyjádřený pomocí obsahů stěn čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 2

Podrobně tuto úpravu odvodíme pro koeficient

$$k_1 = 1 - \frac{2\rho}{v_a}.$$

Vyjdeme z rovnosti dvou vyjádření objemu V čtyřstěnu $ABCD$:

1. $V = \frac{1}{3}S_{BCD}v_a$,
2. čtyřstěn $ABCD$ rozdělíme na čtyři čtyřstěny $BCDS_v$, $CDAS_v$, $ABDS_v$, $ABCS_v$, jež mají stejnou výšku ρ (obr. 2). Objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven součtu objemů těchto čtyř čtyřstěnů:

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}\rho + \frac{1}{3}S_{CDA}\rho + \frac{1}{3}S_{ABD}\rho + \frac{1}{3}S_{ABC}\rho = \frac{1}{3}S\rho,$$

kde $S = S_{BCD} + S_{CDA} + S_{ABD} + S_{ABC}$ je povrch čtyřstěnu $ABCD$.

Z rovnosti

$$\frac{1}{3}S_{BCD}v_a = \frac{1}{3}S\rho$$

plyne

$$\frac{\rho}{v_a} = \frac{S_{BCD}}{S}$$

a odtud po dosazení do rovnosti $k_1 = 1 - \frac{2\rho}{v_a}$ dostáváme

$$k_1 = 1 - \frac{2S_{BCD}}{S}. \quad (2)$$

Obdobná vyjádření koeficientů k_2, k_3, k_4 lze získat tímž postupem (pro $\rho/v_b, \rho/v_c, \rho/v_d$), resp. pouhou cyklickou záměnou z rovnosti (2):

$$k_2 = 1 - \frac{2S_{CDA}}{S}, \quad (3)$$

$$k_3 = 1 - \frac{2S_{ABD}}{S}, \quad (4)$$

$$k_4 = 1 - \frac{2S_{ABC}}{S}. \quad (5)$$

Sečtením rovností (2), (3), (4), (5) dostáváme po jednoduché úpravě

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2$$

a odtud po dosazení do rovnosti (1) plyne dokazovaná rovnost

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2\rho.$$

Literatura

- [1] *Gotman, E. G., Skopec, Z. A.*: Rešenije geometričeskich zadač analitičeskim metodom. Prosveščeniye, Moskva, 1979.
- [2] *Horák, S.*: Mnohostěny. Edice Škola mladých matematiků, svazek 27. Mladá fronta, Praha, 1970.
- [3] *John, J.*: Čtyřstěn v matematických soutěžích. Diplomová práce. (Vedoucí: J. Švrček.) Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc, 2021.
- [4] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část Obecná didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.
- [5] *Polák, J.*: Analogie v matematice a jejich didaktické využití. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 5, s. 321–333.