

Osy úhlů v trojúhelníku

JAROSLAV ŠVRČEK – MARIE CHODOROVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Porovnáme-li naše učebnice pro výuku geometrie (planimetrie) na středních školách (speciálně pak gymnázií) s podobnými používanými učebnicemi ve většině evropských zemích, zjistíme, že v zahraničí je věnováno důležitým vlastnostem os vnitřních a vnějších úhlů v trojúhelníku mnohem více prostoru, viz např. [1, 2] a jinde.

Tento článek vznikl s cílem přiblížit našim čtenářům tři důležité, přitom méně akcentované vlastnosti os vnitřních a vnějších úhlů v libovolném trojúhelníku. Ty jsou doplněny vybranými aplikacemi.

Věta 1 (o ose vnitřního úhlu)

Osa vnitřního úhlu v trojúhelníku dělí jeho protilehlou stranu v poměru délek jí přilehlých stran.

Důkaz (užitím sinové věty) uvedeme pro osu vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC .

Označme D průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A v trojúhelníku ABC s jeho stranou BC . Dále nechť $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a $\varphi = |\sphericalangle ADB|$.

Užitím sinové věty v trojúhelníku ABD dostaneme

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \quad (1)$$

Podobně v trojúhelníku ACD platí

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Porovnáním levých stran rovností (1) a (2) obdržíme

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|},$$

neboli $|BD| : |CD| = |AB| : |AC|$, což jsme chtěli dokázat.

Analogicky lze postupovat i v případě obou zbývajících os vnitřních úhlů.

Jiný důkaz (užitím podobnosti trojúhelníků). Označme E takový bod na polopřímce BA , který leží za bodem A , pro nějž platí $|AE| = |AC|$ (obr. 1). Trojúhelník ACE je tedy rovnoramenný se základnou CE , tj. platí $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle AEC|$. Odtud plyne

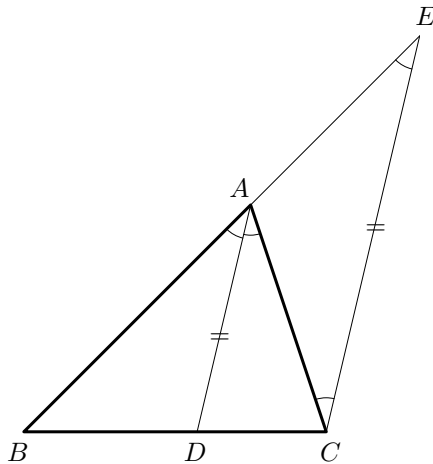
$$|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha,$$

a proto

$$\frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle AEC|.$$

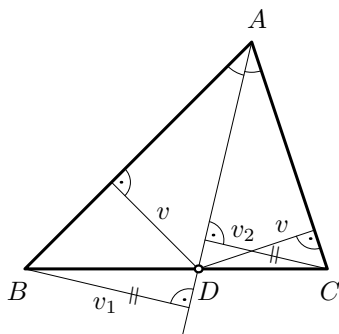
Přímky AD a EC jsou tedy rovnoběžné, a proto trojúhelníky BCE a BDA jsou (podle věty *uu*) podobné. Platí tedy

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|} \iff |BD| : |DC| = |AB| : |AC|.$$



Obr. 1

Jiný důkaz (užitím obsahů trojúhelníků, viz obr. 2). Označme S_{ABD} , resp. S_{ACD} , obsah trojúhelníku ABD , resp. ACD . Průsečík D osy vnitřního úhlu při vrcholu A má přitom stejnou vzdálenost od ramen AB a AC úhlu BAC , kterou označíme v . Tuto velikost v mají tudíž výšky z vrcholu D v trojúhelnících ABD a ACD ke stranám AB a AC . Označme v_1 , v_2 po řadě délky výšek z vrcholů B , C ke společné straně AD obou uvažovaných trojúhelníků a dále $c = |AB|$, $b = |AC|$.



Obr. 2

Pak platí (obr. 2)

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2}|AD| \cdot v_1}{\frac{1}{2}|AD| \cdot v_2} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot v}{\frac{1}{2}|AC| \cdot v} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}.$$

Odtud již přímo obdržíme

$$|BD| : |CD| = |AB| : |AC| = c : b,$$

což představuje stejný výsledek jako v předešlých dvou důkazech.

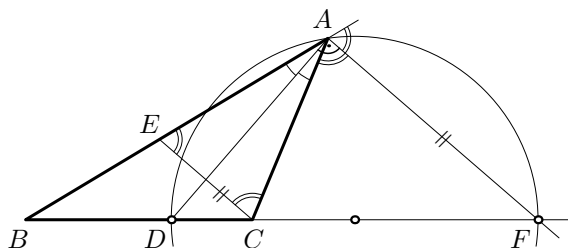
Uvažujme nyní osu vnějšího úhlu u některého z vrcholů trojúhelníku ABC (např. u vrcholu A). Předpokládejme dále, že protilehlá strana BC není základnou rovnoramenného trojúhelníku ABC (v opačném případě by osa vnějšího úhlu u tohoto vrcholu byla rovnoběžná s touto stranou). V takovém případě průsečík D osy vnějšího úhlu při vrcholu A protíná buď polopřímku BC za bodem C (tj. $b < c$), nebo polopřímku CB za bodem B (tj. $b > c$).

Následující tvrzení vyslovíme pouze pro *první* z obou případů. Stejně tvrzení, které platí i ve druhém případě, ponecháváme pozornosti čtenářů.

Věta 2 (o ose vnějšího úhlu)

Nechť F je průsečík osy vnějšího úhlu při vrcholu A v trojúhelníku ABC s polopřímku BC . Pak platí $|BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b$.

Důkaz. Uvažujme vnitřní bod E strany AB trojúhelníku ABC , pro který platí $|AE| = |AC|$. Takový bod E existuje, neboť $c = |AB| > |AC| = b$ (vnitřní úhel při vrcholu C je zde totiž větší než vnitřní úhel při vrcholu B), viz obr. 3.



Obr. 3

Z obr. 3 vidíme, že trojúhelníky BFA a BCE jsou podle věty *uu* podobné, proto (využitím rovnosti $|AE| = |AC|$) platí

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|} \iff |BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 1. Snadno lze dokázat, že osy vnitřního a vnějšího úhlu u libovolného vrcholu trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé. Střed K , L , M kružnic vně připsaných stranám trojúhelníku ABC leží (po dvou) na osách vnějších úhlů trojúhelníku ABC u jednotlivých jeho vrcholů, přičemž body A , B , C jsou paty výšek ostroúhlého trojúhelníku KLM .

Poznámka 2. Tvzení obou předešlých vět lze využít ke snadné konstrukci tzv. Apolloniovy kružnice v rovině (viz např. [4]), tj. množiny všech bodů A roviny, které mají od dvou bodů B , C ($B \neq C$) této roviny daný poměr vzdáleností. Např. pro poměr $c : b$, kde $c > b$, stačí uvnitř úsečky, resp. na polopřímce BC za bodem C , sestrojiti body D , resp. F , pro něž platí

$$|BD| : |CD| = |BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b.$$

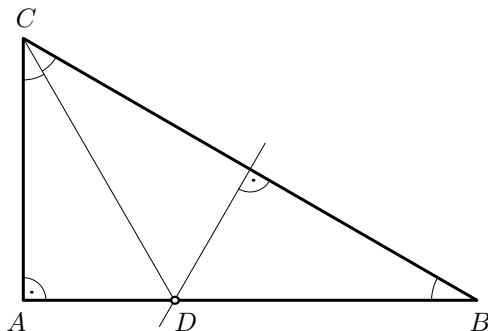
Tyto body jsou průsečíky po řadě osy vnitřního a vnějšího úhlu BAC s přímkou BC . Vzhledem k tomu, že obě osy úhlů jsou navzájem kolmé, leží všechny hledané body A na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem DF (včetně obou krajních bodů průměru DF), viz obr. 3.

V další části uvedeme některé vybrané aplikace výše uvedených tvrzení.

Příklad 1

Je dán pravoúhlý trojúhelník s vnitřními úhly $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Dokažte, že osa jeho přepony protíná delší odvěsnu v bodě, který ji dělí v poměru $1 : 2$.

Řešení. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC , jehož vnitřní úhly při vrcholech B a C mají po řadě velikosti 30° a 60° . Označme D průsečík osy jeho přepony BC s (delší) odvěsnou AB (obr. 4). Vzhledem k tomu, že bod D leží na ose strany (úsečky) BC , je BCD rovnoramenný trojúhelník se základnou BC , v němž $|\sphericalangle BCD| = 30^\circ$, a CD je tedy osou úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku. Podle věty 1 potom ale platí $|AD| : |BD| = |AC| : |BC| = 1 : 2$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 4

V čísle 1 minulého (33.) ročníku časopisu MFI byla zveřejněna tři odlišná řešení následující zajímavé matematické úlohy. Zde uvádíme čtvrté řešení této úlohy, které se opírá o aplikaci výše uvedené věty 1.

Příklad 2 (MFI 32/3, úloha č. 287, J. Švrček)

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou BC . Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná výšku AR a odvěsnu AC daného trojúhelníku po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že $|CQ| = 2|PR|$.

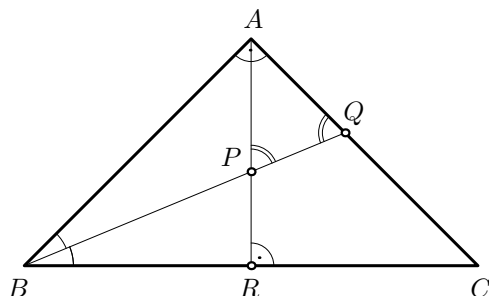
Řešení. V pravoúhlém trojúhelníku ABQ s přeponou BQ (obr. 5) platí

$$|\sphericalangle AQB| = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ = |\sphericalangle AQP|.$$

Protože přímka AR je současně osou pravého úhlu CAB , platí pro velikost vnějšího úhlu APQ při vrcholu P v trojúhelníku ABP

$$|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle BAP| = 22,5^\circ + 45^\circ = 67,5^\circ = |\sphericalangle AQP|.$$

Tento úhel je ale současně vnitřním úhlem v rovnoramenném trojúhelníku APQ se shodnými rameny AP a AQ .



Obr. 5

V pravoúhlém trojúhelníku ABR , kde R je střed přepony BC v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku ABC , pdle věty 1 platí

$$\frac{|PR|}{|AP|} = \frac{|BR|}{|AB|}. \quad (3)$$

Podobně v daném pravoúhlém trojúhelníku ABC (s osou BQ vnitřního úhlu při vrcholu B) platí

$$\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AB|}{|BC|}. \quad (4)$$

S ohledem na rovnost $|AP| = |AQ|$ platí pro součin vztahů (3) a (4)

$$\frac{|PR|}{|CQ|} = \frac{|PR|}{|AP|} \cdot \frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|BR|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BR|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Odtud již bezprostředně plyne $|CQ| = 2|PR|$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (MFI 33/3, úloha č. 295, J. Kalinowski)

Nechť D je bod strany BC rovnostranného trojúhelníku ABC , kde $|BD| = 2|CD|$. Označme E patu kolmice z vrcholu B k přímkce AD a F ($F \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky BDE a CDF mají stejné obsahy.

Řešení této úlohy můžete nalézt v MFI 34, č. 1, v rubrice zajímavé matematické úlohy.

Věta 3

Přímka procházející vrcholem C trojúhelníku ABC protíná kružnici jemu opsanou v bodě S , který je středem jejího oblouku¹⁾ AB neobsahující-

¹⁾Tento bod řešitelé MO často označují jako „Švrčkův bod“.

cím vrchol A , právě když je tato přímka osou vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku.

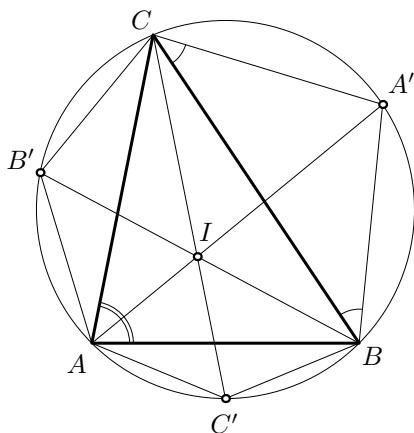
Důkaz.

a) Necht' S je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C daného trojúhelníku ABC s kružnicí jemu opsanou. Protože platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCS|$, jsou tětivy AS a BS této kružnice shodné, a tudíž S je středem jejího oblouku neobsahujícího vrchol C .

b) Snadné zdůvodnění obrácené věty přenecháváme laskavému čtenáři.

Příklad 4

Stranám trojúhelníku ABC jsou vně připsány rovnoramenné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' se základnami AB , BC , CA tak, že při obvyklém označení velikostí vnitřních úhlů daného trojúhelníku je $|\sphericalangle BCA'| = \frac{1}{2}\alpha$, $|\sphericalangle CAB'| = \frac{1}{2}\beta$, a $|\sphericalangle ABC'| = \frac{1}{2}\gamma$. Dokažte, že přímky AA' , BB' , CC' se protínají v jednom bodě.



Obr. 6

Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku BCA' (obr. 5) je podle zadání velikost vnitřního úhlu při jeho hlavním vrcholu A' rovna

$$|\sphericalangle BA'C| = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle BCA'| = 180^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ - \alpha,$$

což znamená, že čtyřúhelník $ABA'C$ je tětivový. Všechny čtyři jeho vrcholy tedy leží na *kružnici opsané* danému trojúhelníku ABC . Analogicky

lze ukázat, že na této kružnici leží také hlavní vrcholy B' a C' rovnoramenných trojúhelníků CAB' a ABC' . Body A' , B' , C' jsou přitom po řadě středy kružnicových oblouků BC , CA , AB , na nichž *neleží* třetí vrchol uvažovaného trojúhelníku ABC . Přímký AA' , BB' , CC' jsou (podle věty 3) osami vnitřních úhlů po řadě při vrcholech A , B , C v trojúhelníku ABC . Ty se však protínají v jednom společném bodě I , kterým je střed kružnice vepsané daného trojúhelníku ABC . Tím je důkaz ukončen.

Příklad 5

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník KLM . Sestrojte trojúhelník ABC , jehož středy vně připsaných kružnic jsou totožné s vrcholy trojúhelníku KLM .

[*Návod.* Z poznámky 1 za větou 2 plyne, že vrcholy hledaného trojúhelníku ABC tvoří paty výšek daného ostroúhlého trojúhelníku KLM . Trojúhelník ABC je tzv. *ortický* trojúhelník daného trojúhelníku KLM .]

Příklad 6

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme M střed strany AB a K průsečík osy úsečky DM s úhlopříčkou AC . Dokažte, že $AK \perp DK$.

Řešení této úlohy užitím věty 3 lze dohledat v článku [3] – jiné řešení příkladu 2 na str. 17.

Závěrem uvádíme pro čtenáře ještě jednu úlohu na použití Apolloniovy kružnice, viz poznámka 2 za větou 2. Ta se objevila mezi tzv. přípravnými úlohami v kategorii A již v 19. ročníku MO. Její řešení lze najít v příslušné ročence MO nebo na stránkách <http://www.matemickaolympiada.cz>.

Příklad 7

V rovině jsou dány dvě neshodné úsečky AB a CD . Sestrojte všechny body X této roviny, pro něž jsou trojúhelníky ABX a CDX podobné.

Literatura

- [1] Cateni, L., Fortini, R., Bernardi, C.: Nuova geometria 1 e 2 (per il liceo classico e per il liceo artistico), 6. vydání, Firenze, 1995.
- [2] Guzicki, W.: Geometria i trygonometria (rozszerzony program matematyki w liceum). Wydawnictwo szkolne Omega, Kraków, 2021.
- [3] Juklová, L., Švrček, J.: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. Matematika–fyzika–informatika, roč. 31 (2022), č. 1, s. 5–20.
- [4] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.